UNTERSUCHUNGEN

UEBER

DIE HOMOGENITÄT

VON

MESSING, ZINK, KUPFER UND EISEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST

UND DER HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

UNIVERSITÄT WÜRZBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

RICHARD HENNIG

AUS PLÖSEN.

LEIPZIG,

DRUCK VON METZGER & WITTIG.

1885.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549806_0229

Einleitung.

Zu den physikalischen Constanten der Körper, deren Werth sich mit grosser Genauigkeit ermitteln lässt, gehört ihre Dichte oder ihr specifisches Gewicht. Es ist mit Hülfe einer feinen Wage leicht möglich, das specifische Gewicht fester Körper durch Wägung in Luft und in Wasser bis auf ein Zehntausendtel genau zu bestimmen, falls nicht besondere Umstände die Beobachtung erschweren. Gleichwohl gehen die Angaben der physikalischen Handbücher und Tabellensammlungen über die specifischen Gewichte gerade der festen Körper oft weit auseinander. So entnehme ich, um einige Daten anzuführen, den Lehrbüchern von Biot, Buff und Wüllner und den Tabellensammlungen von Weisbach und Landolt-Börnstein die folgenden extremen Angaben über die Dichten verschiedener Metalle im gegossenen Zustande: Blei 11,35—11,37; weisses Gusseisen 7,03—7,13; graues Gusseisen 7,58—7,73; Kupfer 8,59 bis 8,92; Messing 7,60—8,80; Zink 6,86 - 7,22; Zinn 7,29—7,47.

Giebt man auch zu, dass diese Zahlen, besonders soweit sie älteren Bestimmungen entnommen sind, mit bedeutenden Beobachtungsfehlern behaftet sein können, so bleibt es doch zweifellos, dass feste Körper, die die Technik als gleichartige betrachtet, insbesondere Metalle im gegossenen Zustande (und auch in gleichen Zuständen mechanischer Verarbeitung) noch sehr grosse Unterschiede im specifischen Gewichte aufzuweisen vermögen; — Unterschiede, die bis zu mehreren Procenten hinaufgehen, und die es ganz zwecklos erscheinen lassen, wenn in physikalischen Tabellen das specifische Gewicht solcher Körper auf drei und mehr Decimalen angegeben wird.

Das Vorhandensein so bedeutender Dichteunterschiede bei technisch gleichartigen Körpern regt nun zwei Fragen an,

über die die heutige physikalische Literatur, soweit mir dieselbe bekannt ist, noch keine hinreichende Auskunft bietet. Einmal fragt es sich: Inwieweit sind die gedachten Dichteunterschiede physikalisch, und inwieweit sind sie chemisch begründet? — Ich will dabei unter chemisch begründeten Unterschieden alle diejenigen zusammenfassen, die lediglich infolge von Mischungsverschiedenheiten bei zusammengesetzten und von fremden Beimengungen bei sonst einfachen Körpern auftreten, gleichviel ob die Mischung eine chemische Verbindung, oder eine Legirung, oder blos ein mechanisches Gemenge darstellt. Unter den Dichteunterschieden physikalischer Natur will ich diejenigen verstehen, die bei gleicher Zusammensetzung infolge physikalischer Einwirkungen (Druck, Zug, Wärme — soweit dieselbe dauernde Dichteänderungen hervorbringt — etc.) entstehen, oder die in der Porosität des Materials begründet sind.

Dieser ersten Frage sind allerdings die Physiker bereits näher getreten, insofern sie die specifischen Gewichte fester Körper, speciell der Metalle, in verschiedenen Formen technischer Verarbeitung, im gegossenen, gehämmerten, gewalzten Zustande bestimmt haben. Doch müsste eine wirklich kritische Untersuchung dieses Gegenstandes zugleich berücksichtigen, in wie weit bei den verschiedenen Untersuchungsobjecten auch chemische Unterschiede mit ins Spiel kamen und die gefundenen Zahlen beeinflussten. Ein derartiger Weg der Untersuchung wäre aber wegen der Umständlichkeit genauer chemischer Analysen mit grossen Schwierigkeiten verbunden, zum wenigsten sehr zeitraubend. Man würde deshalb, um die gedachte Frage systematisch zu verfolgen, wohl am besten so verfahren, dass man einen und denselben Untersuchungskörper, oder doch Untersuchungskörper gleicher Provenienz, etwa von demselben Gusse stammend, den verschiedensten physikalischen Einwirkungen aussetzt und die hierdurch hervorgebrachten Dichteänderungen studirt. Einzelne in dieser Weise ausgeführte Untersuchungen sind mir bekannt geworden, z. B. Beobachtungen von M. Baumeister[1]) über die Aenderungen des specifischen Gewichtes von Drähten durch Ausziehen und

1) M. Baumeister, Untersuchung über Torsionselasticität; Inaug.-Diss. Leipzig 1883.

durch Glühen; ferner zwei Arbeiten von C. Fromme[1]) über die Dichteänderungen, welche Stahl durch Härten und Anlassen erleidet, und ähnliche specielle Untersuchungen; an umfassenden Arbeiten über diesen Gegenstand fehlt es jedoch noch.

Die erste Frage richtet sich also auf die Gründe der beobachteten Dichteverschiedenheiten in ihrem wechselseitigen Verhältniss; — die Beantwortung dieser Frage würde auch zugleich die Beträge der bei verschiedenen Untersuchungskörpern aus demselben Materiale auftretenden Dichteschwankungen feststellen. Eine zweite Frage ist nun die: Inwieweit können Dichteverschiedenheiten, gleichviel ob physikalischer oder chemischer Natur, innerhalb eines und desselben Untersuchungskörpers auftreten?

Ueber diesen Punkt scheinen, soweit meine Kenntnisse der physikalischen Literatur reichen, noch sehr wenig Untersuchungen vorzuliegen. Die oben erwähnten Arbeiten von C. Fromme enthalten einige Beobachtungsreihen über die Dichtevertheilung in gehärteten Stahlstäben; ebenso mögen vielleicht in anderen Arbeiten ähnliche Beobachtungen enthalten sein; umfassendere Untersuchungen über diesen Gegenstand, die im Stande wären, ein bestimmtes Material in Bezug auf die Homogenität der aus demselben hergestellten Körper zu charakterisiren, sind mir jedoch nicht bekannt.

Und doch ist gerade diese Frage nicht blos von grossem theoretischen Interesse, sondern auch von wesentlich praktischer Bedeutung. So erfordern z. B. verschiedene Aufgaben der praktischen Physik und der Technik die Berechnung des Trägheitsmomentes gegebener Körper in Bezug auf gegebene Axen; diese Berechnung ist aber nur möglich unter Annahme eines völlig homogenen Körpers oder bei genauer Kenntniss der Dichtevertheilung. Ebenso ist die Kenntniss der Dichtevertheilung nöthig bei der Berechnung der Schwerpunktscoordinaten eines gegebenen Körpers, die allerdings in der Praxis nur selten vorkommen wird.

Auf Anregung des Hrn. Prof. F. Kohlrausch, meines hochverehrten Lehrers, habe ich es unternommen, die zweite

1) C. Fromme, Wied. Ann. 8. p. 352. 1879 u. 22. p. 371. 1884.

der bezeichneten Fragen zum Gegenstande einer längeren Experimentaluntersuchung zu machen, und habe versucht, für einige Metalle und Legirungen die Grenzen der innerhalb eines und desselben Körpers auftretenden Dichteschwankungen zu bestimmen und womöglich eine bestimmte Gesetzmässigkeit der Dichtevertheilung nachzuweisen.

Als Untersuchungsobject wählte ich zunächst das Messing, wegen der eminenten Bedeutung, die diese Legirung für die physikalische Technik besitzt. Die bemerkenswerthen Resultate, die mir dieses Material ergab, veranlassten mich dann, auch seine beiden Grundbestandtheile Zink und Kupfer der gleichen Untersuchung zu unterwerfen, um zu sehen, ob auch an diesen ähnliche Erscheinungen zu Tage treten würden. Endlich lag es nahe, auch das für die gesammte Technik wichtigste aller Metalle: Eisen, speciell Stahl auf seine Homogenität hin zu prüfen und insbesondere zu untersuchen, ob die Dichtevertheilung im Stahl durch den Process der Härtung wesentlich geändert werde.

1. Methode der Untersuchung. — Die zur Untersuchung herangezogenen Körper verwandte ich meist im gegossenen Zustande. Einmal ist dies der primäre Zustand aller Metalle, ja der meisten anorganischen Festkörper überhaupt. Sodann ist es aber auch von vornherein wahrscheinlich, dass die Inhomogenität eines Körpers in diesem Zustande am grössten sein wird, da durch mechanische Bearbeitung wohl vorhandene Dichteschwankungen ausgeglichen, schwerlich aber vergrössert werden können. Nur wenn ein Metall im gegossenen Zustande erhebliche Dichteschwankungen zeigte, wurde es deshalb auch in anderen Formen technischer Verarbeitung, und zwar im gewalzten und im gezogenen Zustande (Blech und Draht) der Untersuchung unterworfen. Nur Stahl, der als Rohguss schwer blasenfrei zu erhalten ist, wurde von mir blos im bearbeiteten, nämlich im gewalzten Zustande untersucht.

Bei der Auswahl der zu untersuchenden Materialien habe ich mich aus naheliegenden Gründen einer möglichsten Mannigfaltigkeit in der Wahl der Bezugsquellen befleissigt.

Der Weg der Untersuchung war nun der, dass der zu untersuchende Körper in möglichst systematischer Weise in

schiedene Theile zerlegt und dann die specifischen Gewichte der einzelnen Theile durch Wägung in Luft und in Wasser bestimmt wurden. Wo eine direkte Zerlegung nicht anging oder eine die Dichtevertheilung im Körper gefährdende Kraftanwendung erfordert hätte, wurde der Körper entweder auf mechanischem Wege durch Abdrehen und Abfeilen, oder auf chemischem Wege durch Abätzen successive verkleinert und immer die specifischen Gewichte der rückbleibenden Stücke bestimmt, die der abgedrehten oder abgeätzten Schichten aber hieraus durch Rechnung abgeleitet.

Da die mechanische Verkleinerung am bequemsten durch Abdrehen geschehen konnte, wurden die untersuchten Körper meist in Form von Cylindern oder Hohlcylindern verwendet. Bei der Untersuchung von Blechen geschah die Verkleinerung durch Abfeilen oder Abätzen.

Das Verfahren der mechanischen Verkleinerung hat vor dem der chemischen den Vorzug, dass man auf ersterem Wege ganz bestimmte Theile des Körpers entfernen und so leicht den Körper in systematischer Weise zerlegen kann, während die chemische Verkleinerung durch Abätzen immer die ganze Oberflächenschicht des Körpers gleichmässig hinwegnimmt und so Dichteschwankungen innerhalb dieser Oberflächenschicht der Beobachtung entzieht. Dagegen hat die mechanische Verkleinerung auch einige Bedenken, die im Folgenden erörtert werden sollen.

Einmal liegt die Möglichkeit vor, dass die bei der Procedur des Abfeilens oder Abdrehens, sowie bei dem Auflöthen oder Aufkitten des Untersuchungskörpers auf das Futter der Drehbank unvermeidliche Erwärmung eine dauernde Dichteänderung des Körpers verursachen könnte. Noch viel mehr ist zu befürchten, dass die directen mechanischen Einwirkungen des Abdrehens oder Abfeilens solche bleibende Dichteänderungen zur Folge haben möchten, sodass die successive bestimmten specifischen Gewichte gar nicht die ursprünglichen Dichten der betreffenden Theile im unversehrten Körper darstellen würden.

Um diesen Bedenken Rechnung zu tragen, schien es geboten, den Einfluss der gedachten beiden Factoren im Sinne

einer etwaigen Dichteänderung einer besondern Untersuchung zu unterwerfen.

Was zunächst den Einfluss der Erwärmung anbetrifft, so konnte ich mich leicht überzeugen, dass derselbe bei den von mir untersuchten Körpern nicht in Betracht kam. Ich brauchte nur zu diesem Zwecke von verschiedenen Untersuchungskörpern einzelne Theile, deren specifisches Gewicht ich vorher bestimmt hatte, auf eine hohe Temperatur zu bringen; zeigte sich nach dem Erkalten das specifische Gewicht des ganzen Stückes unverändert, so ist mit Sicherheit anzunehmen, dass auch die Dichtevertheilung in diesem Stücke keine wesentliche Aenderung erfahren hatte. In der That zeigten nun meine diesbezüglichen Beobachtungen, deren Ergebnisse den Tabellen des nächsten Abschnittes mit beigefügt sind, dass nur eine Erwärmung bis in die Nähe des Schmelzpunktes zuweilen eine dauernde Dichteänderung, und zwar dann eine Dichteverminderung zur Folge hatte, während durch geringere Erwärmungen, die aber die Grenzen der bei der mechanischen Bearbeitung auftretenden Temperaturerhöhungen noch weit überstiegen, die specifischen Gewichte nicht merklich geändert wurden.

Weit schwieriger war es, den unmittelbaren Einfluss der mechanischen Bearbeitung auf die gefundene Dichtevertheilung zu beurtheilen. Zunächst suchte ich, um denselben möglichst zu verringern, allen überflüssigen Kraftaufwand zu vermeiden, indem ich mit sehr scharfen Werkzeugen arbeitete und beim Abdrehen immer sehr feine Späne nahm. Weiter habe ich einige mal versucht, das specifische Gewicht der Drehspäne selbst pyknometrisch zu bestimmen; zeigte sich hierbei kein wesentlicher Unterschied gegen das specifische Gewicht des übrigen Materials, so war mit einiger Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass auch der rückbleibende Kern durch das Abdrehen keine Dichteänderung erfahren hatte. Die beiden Beobachtungen, welche ich nach dieser Richtung ausführte, ergaben, dass das specifische Gewicht der Drehspäne mit der berechneten Dichte der abgedrehten Schicht bis auf etwa 1% übereinstimmte; die Abweichung übersteigt jedenfalls nicht wesentlich die Grenzen der Beobachtungsfehler.

Einen überzeugenderen Beweis von dem geringen Einfluss

der mechanischen Bearbeitung auf die Dichtevertheilung in meinen Untersuchungskörpern erhielt ich aber, indem ich von benachbarten Theilen solcher Körper, in denen eine gewisse Gleichmässigkeit der Dichtevertheilung zu erwarten war, den einen mechanisch, den andern chemisch verkleinerte. Es ergab sich hierbei immer derselbe Charakter der Dichtevertheilung und auch annähernd dieselben Beträge der Dichteschwankungen — mit Ausnahme eines einzigen Kupfercylinders (Tab. 20), bei dem die abgedrehten Theile eine geringe Dichtezunahme, die abgeätzten eine geringe Dichteabnahme von aussen nach innen zeigten, welche Dichteänderungen jedoch bei den direkt beobachteten Werthen noch nicht den Betrag von $1^0/_{00}$ erreichten. — Damit ist es wenigstens im hohen Grade wahrscheinlich gemacht, dass bei den von mir untersuchten Materialien die Dichtevertheilung in den Untersuchungskörpern durch die mechanische Bearbeitung derselben nicht wesentlich gestört worden ist.

Die in den Tabellen des dritten Abschnitts niedergelegten Beobachtungen wurden in der Zeit von Ostern 1884 bis Ostern 1885, und zwar zum grössten Theile im physikalischen Institute der Universität Würzburg ausgeführt; nur einige Untersuchungen über Messing und Zink (Tab. 5, 11, 12, 13 und 14) habe ich während der Sommerferien im physikalischen Laboratorium des Polytechnikums Dresden, das mir zu diesem Zwecke von Hrn. Geheimrath Töpler gütigst zur Benutzung gestellt wurde, zur Ausführung gebracht.

Die Wägungen in Luft und in Wasser wurden anfangs mit einer kleineren Oertling'schen Wage von 50 g Tragfähigkeit und einer Empfindlichkeit von 1,0 Scalentheilen pro Milligramm ausgeführt; späterhin stand mir eine vorzügliche Schickert'sche Wage von 1000 g Tragfähigkeit und einer Empfindlichkeit von 1,25 Scalentheilen pro Milligramm zur Verfügung, die mir gestattete, auch grössere Objecte der Untersuchung zu unterwerfen. Eine ganz gleiche Schickert'sche Wage benutzte ich zu den in Dresden angestellten Beobachtungen.

Dass bei Wägungen, bei denen es mir auf Zehntelmilligramme ankam, die zur Verwendung gelangten Gewichts-

sätze vorher genau calibrirt wurden, bedarf kaum der Erwähnung.

2. Genauigkeit der Bestimmungen. Schreibt man die Formel für das specifische Gewicht eines festen Körpers unter Weglassung aller Correktionsglieder:

$$s = \frac{m}{m - m'},$$

wobei m das Gewicht des Körpers in Luft, m' sein Gewicht in Wasser bedeutet, so findet sich durch Differentiation:

$$\frac{ds}{s} = \frac{m\,dm' - m'\,dm}{m\,(m - m')},$$

Bezeichnen dm und dm' die absoluten Beträge der bei der Wägung in Luft und in Wasser zu gewärtigenden Fehler, so ist also der mögliche relative Fehler des Resultates, wie er aus der Unsicherheit der Wägung hervorgeht, seinem Betrage nach:

$$\frac{ds}{s} = \frac{m\,dm' + m'\,dm}{m\,(m - m')} = \frac{dm + dm'}{m - m'} - \frac{dm}{m}.$$

Bei der vorzüglichen Qualität der von mir benutzten Wagen bin ich geneigt, den Fehler bei der Wägung in Luft, der fast ausschliesslich aus der Inconstanz des Nullpunktes hervorgeht (da die Ungleicharmigkeit der Wage bei diesen relativen Wägungen nicht in Betracht kommt), für Gewichte bis zu 50 g auf nicht höher als $dm = 0{,}1$ mg zu schätzen. Bei der Wägung in Wasser kommen zu der Inconstanz des Nullpunktes noch zwei andere Fehlerquellen hinzu: erstens das Anhaften kleiner Luftbläschen am Untersuchungskörper, und zweitens die an der Durchtrittsstelle des Aufhängefadens durch die Wasseroberfläche auftretenden Capillarkräfte. Nimmt man an, dass bei sorgfältiger Ausführung der Untersuchung der Einfluss jeder dieser beiden Fehlerquellen ebenfalls 0,1 mg betrage, so würde also der gesammte mögliche Fehler bei der Wägung in Wasser sich auf $dm' = 0{,}3$ mg belaufen. Unter diesen Annahmen würde sich dann bei einem Gewichte des Körpers von 50 g und einem specifischen Gewichte von 8,0 für den relativen Fehler des Resultates nach obiger Formel der Werth ergeben:

$$\frac{ds}{s} = \frac{0{,}0004 \,.\, 8}{50} - \frac{0{,}0001}{50} = 0{,}000\,06,$$

der absolute Fehler des Resultates würde sich also auf 5 Einheiten der vierten Decimale belaufen. Eine merkliche Vergrösserung könnte dieser Fehler noch durch die Unsicherheit der Temperaturbestimmung des Wassers erfahren. Bei einem Fehler in der Temperaturablesung von $0{,}1^0$ kann sich der Gesammtfehler des Resultates je nach der Temperatur des Wassers auf 6 bis 7 Einheiten der 4. Decimale steigern.

Wo die Fehler meiner Wägungen die oben angenommenen Beträge zu übersteigen schienen, oder wo die Kleinheit des Untersuchungskörpers einen grösseren möglichen Fehler des Resultates bedingte, suchte ich die gewünschte Genauigkeit durch wiederholte Bestimmungen zu erreichen. Die specifischen Gewichtsangaben des nächsten Capitels dürften deshalb, soweit sie durch directe Beobachtung gefunden sind, im allgemeinen auf 5 Einheiten der vierten Decimale zuverlässig sein. Wo zufällige Umstände eine geringere Genauigkeit bedingten, ist der aus wiederholten Beobachtungen entnommene mittlere Fehler des Resultates diesem in Klammern beigefügt.

Was nun die durch Rechnung gefundenen specifischen Gewichte der abgedrehten oder abgeätzten Schichten betrifft, so hängt deren Genauigkeit wesentlich ab von dem Gewichtsverhältniss der betreffenden Schicht zum ganzen Körper. Es seien m_1 und m_2 die Gewichte, s_1 und s_2 die specifischen Gewichte des Körpers vor und nach dem Abdrehen, so ist das specifische Gewicht der abgedrehten Schicht:

$$S = \frac{m_1 - m_2}{\frac{m_1}{s_1} - \frac{m_2}{s_2}} = \frac{(m_1 - m_2)\, s_1 s_2}{m_1 s_2 - m_2 s_1}.$$

Hieraus ergiebt sich nach einigen Umformungen:

$$\frac{dS}{S} = \frac{(m_1\, dm_2 - m_2\, dm_1)\,(s_1 - s_2)}{(m_1 s_2 - m_2 s_1)\,(m_1 - m_2)} + \frac{m_1 s_2^{\,2}\, ds_1 - m_2 s_1^{\,2}\, ds_2}{s_1 s_2\,(m_1 s_2 - m_2 s_1)}.$$

Setzen wir nun:

$$dm_1 = \pm\, dm_2 = dm, \qquad ds_1 = \pm\, ds_2 = ds,$$

so wird also der mögliche relative Fehler im specifischen Gewichte der abgedrehten Schicht:

$$\frac{dS}{S} = dm\,\frac{(m_1 + m_2)(s_1 - s_2)}{(m_1 s_2 - m_2 s_1)(m_1 - m_2)} + ds\,\frac{m_1 s_2^2 + m_2 s_1^2}{s_1 s_2 (m_1 s_2 - m_2 s_1)}.$$

Der absolute Fehler wird demnach, indem wir setzen $m/s = v$:

$$dS = dm\,\frac{(m_1 + m_2) s_1 - s_2)}{(v_1 - v_2)^2 s_1 s_2} + ds\,\frac{\left(\frac{v_1}{s_1} + \frac{v_2}{s_2}\right)(m_1 - m_2)}{(v_1 - v_2)^2}.$$

Da $s_1 - s_2$ jedenfalls klein ist, so wird, wenn man die Gewichte m_1 und m_2 auch nur auf Centigramme genau in die Rechnung einführt das erste Glied des vorstehenden Ausdrucks gegen das zweite völlig zu vernachlässigen sein. Der mögliche Fehler in dem berechneten specifischen Gewichte der abgedrehten oder abgeätzten Schicht ist also durch den Ausdruck gegeben:

$$dS = ds\,\frac{\left(\frac{v_1}{s_1} + \frac{v_2}{s_2}\right)(m_1 - m_2)}{(v_1 - v_2)^2},$$

wobei ds den möglichen Fehler in den ursprünglichen Bestimmungen bezeichnet.

Da es ganz überflüssig wäre, die Gewichte m_1 und m_2 genauer als auf Centigramme in die Rechnung einzuführen, so sind auch in den Tabellen des nächsten Abschnitts diese Gewichte nur auf Centigramme angegeben, obgleich sie für die ursprünglichen Bestimmungen durchweg auf Zehntelmilligramme beobachtet wurden.

Die nach obiger Formel berechneten Fehler in den specifischen Gewichten der abgedrehten oder abgeätzten Schichten sind in den Tabellen des nächsten Abschnitts den betreffenden Angaben in Klammern beigefügt. Dabei ist immer, wenn nichts anderes bemerkt ist, der Fehler der ursprünglichen Bestimmungen zu 5 Einheiten der vierten Decimale angenommen.

3. Beobachtungen.

Es sind im Folgenden zunächst die Gewichte und specifischen Gewichte der sämmtlichen untersuchten Körper in tabellarischen Zusammenstellungen aneinander gereiht, während von erläuterndem Texte nur soviel beigegeben ist, als zum Verständniss der Beobachtungen nothwendig erschien. Die

Erörterung der aus den Beobachtungen sich ergebenden Resultate bildet dann den Inhalt des nächsten Abschnitts.

Die Dichteangaben der folgenden Tabellen gelten durchweg für eine Körpertemperatur von $+15^{0}$ und sind bezogen auf Wasser vom Dichtemaximum.

Die eingeklammerten Zahlen bedeuten bei den direct beobachteten Werthen den aus mehreren Beobachtungen entnommenen mittleren Fehler, bei den abgeleiteten Werthen den aus der Unsicherheit der ursprünglichen Bestimmungen resultirenden möglichen Fehler des Resultates in Einheiten der letzten Decimale. Wo den direct beobachteten Werthen keine Fehlerangabe und keine darauf bezügliche Bemerkung beigegeben ist, ist der Fehler auf höchstens fünf Einheiten der letzten Decimale anzunehmen.

Die über den Colonnen stehenden Dimensionsangaben sind immer in Millimetern gegeben; übrigens gelten diese Angaben in der Regel nur in ziemlich roher Annäherung.

a. Messing.

Die ersten Untersuchungsobjecte (Tab. 1—4) waren Gussstücke, wie ich sie zufällig in den Werkstätten des physikalischen Institutes und des Herrn E. Hartmann in Würzburg vorfand; die späteren Körper (Tab. 5—7) sind nach meinen Angaben und unter meiner Aufsicht durch die Herren Kunstgiesser Pirner und Franz in Dresden gegossen worden. Das Mischungsverhältniss betrug für diese letzten Körper zwei Theile Kupfer auf ein Theil Zink. Das Zink stammte aus den v. Giesche'schen Zinkwerken „Paulshütte“ in Oberschlesien, das Kupfer war Mansfelder Raffinat.

Messingguss Nr. 1. Hohlcylinder; äusserer Durchmesser 31 mm, innerer Durchmeeser 17 mm, Höhe 11 mm. Derselbe wurde durch Meridianschnitte in drei Sectoren zerlegt, die mit I, II, III bezeichnet sind. Das Material war sehr zinkreich (Gelbguss).

Tabelle 1.

Das ganze Stück	Theil I	Theil II	Theil III
46,81 g	15,21 g	14,32 g	15,15 g
8,1893	8,1933	8,2156 (± 11)	8,1866 (±9)

Das mittlere specifische Gewicht der drei Theilstücke berechnet sich hieraus zu 8,1982. Die beträchtliche Abweichung von dem ursprünglichen Werthe des ganzen Stückes rührt davon her, dass der Körper eine Gussblase enthielt, die beim Zerschneiden geöffnet worden war.

Messingguss Nr. 2. Scheibe mit Zapfen. Durchmesser der Scheibe 30 mm, Höhe 5 mm; Dicke des Zapfens 8 mm, Länge 27 mm. Es wurde der Zapfen abgetrennt und die Scheibe diametral in zwei Theile zerschnitten. Das Material war sehr kupferreich (Rothguss).

Tabelle 2.

Das ganze Stück	Der Zapfen	Halbscheibe I	Halbscheibe II
45,42 g 8,6289	10,91 g 8,6850 (± 17)	16,51 g 8,6048	15,23 g 8,6103

Das mittlere specifische Gewicht der drei Theilstücke berechnet sich hieraus zu 8,6271.

Messingguss Nr. 3. Aus einem Messingcylinder von 34 mm Durchmesser wurden auf der Drehbank zwei Scheiben herausgeschnitten und deren specifischen Gewichte zunächst im ganzen bestimmt. Dann wurde aus den Scheiben mittelst des Stichels der innere Kern herausgestochen und der rückbleibende äussere Rand noch diametral in zwei Theile zerschnitten.

Tabelle 3.

	Die ganzen Scheiben	Innerer Kern	Aeusserer Rand	Theile des Randes 1	Theile des Randes 2
Scheibe I	50,81 g 8,4996	15,89 g 8,3362 (± 8)	24,37 g 8,6736 (± 7)	11,53 g 8,6731	12,53 g 8,6771 (± 10)
Scheibe II	55,51 g 8,4726	17,31 g 8,2858 (± 20)	27,57 g 8,6655 (± 8)	13,30 g 8,6831 (± 8)	13,94 g 8,6544 (± 10)

Die mittlere Dichte der beiden Randtheile berechnet sich hieraus für Scheibe I zu 8,6753, für Scheibe II zu 8,6684, welche Werthe bis auf wenige Einheiten der dritten Decimale mit der ursprünglich gefundenen übereinstimmen.

Beide Scheiben I und II waren vor der Zerlegung bis zum Schwarzanlaufen erhitzt worden; ihr specifisches Gewicht zeigte sich nach dem Erkalten durchaus unverändert.

Um zu constatiren, ob die beobachtete Inhomogenität durch starkes Ausglühen ausgeglichen oder doch vermindert werden könne, wurden von demselben Gusscylinder nochmals zwei Scheiben heruntergeschnitten, deren eine im Gasgebläse bis zur hellen Rothgluth erhitzt und dann im verglimmenden Kohlenfeuer langsam abgekühlt, die andere zum Vergleich im rohen Zustande untersucht wurde. Die Untersuchungsmethode war diesmal die, dass die Scheiben auf der Drehbank successive abgedreht und immer die specifischen Gewichte der rückbleibenden Stücke bestimmt wurden.

Tabelle 4. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben roh	Ganze Scheibe geglüht	Abgedreht auf $r = 12{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 7{,}5$ mm	Bemerkungen
Scheibe III	51,83 g 8,4751	51,58 g 8,4419	29,66 g 8,3104	10,80 g 8,2773	r bezeichnet den Radius der Scheiben. Die Fehler können, da die Beobachtungen nur einmal ausgeführt wurden, in den letzten Colonnen bis in die dritte Decimale hineinreichen.
Scheibe IV	37,96 g 8,4826		21,33 g 8,3402	7,40 g 8,2975	

Tabelle 4ª. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 4{,}5$ mm	Schicht 2 $d = 5$ mm	Kern $r = 7{,}5$ mm	Bemerkungen
Scheibe III (geglüht)	21,92 g 8,579 (±4)	18,87 g 8,329 (±2)	10,80 g 8,277 (±1)	Die Schichten sind von aussen nach innen gezählt; d bedeutet die ungefähre Dicke der Schicht.
Scheibe IV (roh)	16,63 g 8,672 (±4)	13,93 g 8,363 (±2)	7,40 g 8,297 (±1)	Bei der Fehlerberechnung ist ein Fehler der ursprüngl. Bestimmungen von 1. Einh. der 3. Decimale zu Grunde gelegt.

Es hat also zwar die mittlere Dichte der Scheibe III durch das Ausglühen eine merkliche Dichteänderung erfahren, doch ist der Maximalbetrag der Dichteschwankungen in der geglühten Scheibe nur wenig geringer als in der ungeglühten.

Messingguss Nr. 4. Hohlscheibe (Ring), gegossen von Pirner und Franz in Dresden. Die Ebene des Ringes stand beim Giessen vertical.

Das Gussstück wurde sorgfältig abgedreht; der äussere Durchmesser betrug nach dem Abdrehen 80,0 mm, der innere

Durchmesser 60,0 mm, die Höhe 5,7 mm. Das Gewicht des ganzen Ringes wurde zu 103,832 g bestimmt.

Der Ring wurde mit der Säge in drei Segmente zerschnitten und diese erst von aussen, dann von innen successive abgedreht. Das Segment II bildete den in der Gussform zu unterst gelegenen Theil des Ringes. In der Schnittfläche zwischen I und III, also im obersten Theile des Ringes, befand sich eine Gussblase, die durch das Zerschneiden geöffnet worden war. Im übrigen zeigte sich das Material beim Abdrehen völlig blasenfrei.

Tabelle 5. (Beobachtet.)

	Die ganzen Segm. $r_1 = 40$; $r_2 = 30$	Aussen abgedr. $r_1 = 39$; $r_2 = 30$	Aussen abgedr. $r_1 = 38$; $r_2 = 30$	Aussen abgedr. $r_1 = 37$; $r_2 = 30$	Innen abgedr. $r_1 = 37$; $r_2 = 31$	Innen abgedr. $r_1 = 37$; $r_2 = 32$	Innen abgedr. $r_1 = 37$; $r_2 = 33$
Segment I	34,62 g 8,2025	31,05 g 8,1983	26,65 g 8,1935	23,01 g 8,1875	19,57 g 8,1836 (±10)	17,32 g 8,1810	13,74 g 8,1787
Segment II	34,53 g 8,2617	30,95 g 8,2587	26,37 g 8,2572	22,86 g 8,2558 (±8)	19,37 g 8,2512	16,88 g 8,2488	13,35 g 8,2485
Segment III	32,61 g 8,2238	29,34 g 8,2206	25,18 g 8,2173	21,73 g 8,2133 (±6)	18,39 g 8,2094	15,92 g 8,2080	12,59 g 8,2074

Tabelle 5a. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 1$ mm	Schicht 2 $d = 1$ mm	Schicht 3 $d = 1$ mm	Schicht 4 $d = 4$ mm	Schicht 5 $d = 1$ mm	Schicht 6 $d = 1$ mm	Schicht 7 $d = 1$ mm
Segment I	3,57 g 8,239 (±9)	4,40 g 8,227 (±7)	3,64 g 8,231 (±7)	13,74 g 8,179 (±1)	3,58 g 8,190 (±4)	2,25 g 8,203 (±9)	3,44 g 8,210 (±6)
Segment II	3,58 g 8,288 (±9)	4,58 g 8,268 (±7)	3,51 g 8,256 (±7)	13,35 g 8,218 (±1)	3,53 g 8,249 (±4)	2,50 g 8,269 (±9)	3,48 g 8,281 (±6)
Segment III	3,28 g 8,254 (±9)	4,16 g 8,240 (±7)	3,45 g 8,243 (±7)	12,59 g 8,207 (±1)	3,33 g 8,210 (±4)	2,48 g. 8,220 (±9)	3,34 g 8,234 (±6)
I + II + III im Mittel	10,42 g 8,261 (±9)	13,14 g 8,245 (±7)	10,61 g 8,247 (±7	39,68 g 8,211 (±1)	10,44 g 8,217 (±4)	7,22 g 8,231 (±9)	10,26 g 8,242 (±6)

Beim letzten Abdrehen der drei Segmente, also von Schicht 5, wurde ein Theil der Drehspäne gesammelt und deren Dichte mit Hülfe des Pyknometers bestimmt. Es fanden sich bei drei Bestimmungen die Werthe 8,253, 8,308 und 8,351; im Mittel also $8{,}30 \pm 0{,}03$.

Die mittlere Dichte des ganzen Ringes berechnet sich aus den Dichten der drei Segmente zu 8,2291.

Messingguss Nr. 5. Vollcylinder, gegossen von Pirner und Franz in Dresden in verticale, kalte Sandform. Die Höhe des Cylinders betrug 280 mm, der Durchmesser nach dem Abdrehen der Gusshaut 38 mm.

Aus dem Cylinder wurden senkrecht zur Axe sechs Scheiben herausgeschnitten, die von unten nach oben mit I bis VI bezeichnet sind. Der Abstand der einzelnen Scheiben voneinander betrug ca. 50 mm. Die Scheiben I und III wurden successive abgedreht; Scheibe V in drei Sectoren zerschnitten und diese Sectoren dann gleichfalls abgedreht.

Tabelle 6. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben $r = 19$ mm	Abgedreht auf $r = 16$ mm	Abgedreht auf $r = 13$ mm	Abgedreht auf $r = 10$ mm	Abgedreht auf $r = 7$ mm	Bemerkungen.
Scheibe I	101,85 g 8,1854	68,66 g 8,1064	44,21 g 8,1012	26,25 g 8,0968	12,73 g 8,0919	Von den drei Sectoren der Scheibe V war Sector Vc nicht genau central ausgeschnitten; seine Spitze erreichte nicht das Kreiscentrum, daher seine grössere Dichte. Das mittlere spec. Gewicht der drei Sectoren berechnet sich zu 8,2048, also etwas grösser als das der ganzen Scheibe V. Es rührt dies daher, dass beim Zerschneiden mehr centrale als peripherische Theile in Wegfall gekommen sind.
Scheibe II	93,77 g 8,1694					
Scheibe III	98,53 g 8,1238	66,87 g 8,0304	42,84 g 8,0139	25,41 g 8,0105		
Scheibe IV	110,34 g 8,1751					
Scheibe V	97,01 g 8,1960					
Scheibe VI	89,19 g 8,1476					
	Die ganzen Sectoren $r = 19$ mm	Abgedreht auf $r = 18$ mm	Abgedreht auf $r = 16$ mm	Abgedreht auf $r = 13$ mm		
Sector V^a	31,28 g 8,2001	26,85 g 8,1587	21,28 g 8,1213 (±8)	13,16 g 8,1173		
Sector V^b	30,95 g 8,1892	26,97 g 8,1541	21,14 g 8,1216	13,57 g 8,1145		
Sector V^c	28,53 g 8,2269	26,67 g 8,2112	20,33 g 8,1529	12,40 g 8,1227		

Scheibe II wurde nach der ersten Dichtebestimmung bis zum Schwarzanlaufen erhitzt, dann in Wasser abgekühlt und

abermals die Dichte bestimmt. Es fand sich nach Entfernung der Oxydschicht:

$$m = 93{,}72 \text{ g}, \quad s = 8{,}1678.$$

Es hat sich also durch die starke Erhitzung nur eine sehr geringfügige, die Grenzen der Beobachtungsfehler kaum überschreitende Dichteänderung ergeben.

Tabelle 6[a]. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 3$ mm	Schicht 2 $d = 3$ mm	Schicht 3 $d = 3$ mm	Schicht 4 $d = 3$ mm	Kern
Scheibe I	33,19 g 8,354 (±3)	24,45 g 8,116 (±3)	17,96 g 8,107 (±2)	13,52 g 8,102 (±2)	12,73 g 8,092 (±1)
Scheibe III	31,66 g 8,328 (±3)	24,03 g 8,060 (±3)	17,43 g 8,019 (±2)		25,41 g 8,010 (±1)
	Schicht 1 $d = 1$ mm	Schicht 2 $d = 2$ mm	Schicht 3 $d = 3$ mm	Kern $r = 13$ mm	
Sector V^a	4,43 g 8,460 (±7)	5,56 g 8,305 (±5)	8,13 g 8,127 (±2)	13,16 g 8,117 (±1)	
Sector V^b	3,98 g 8,435 (±8)	5,83 g 8,273 (±5)	7,58 g 8,135 (±3)	13,57 g 8,115 (±1)	
Sector V^c	1,86 g 8,458 (±15)	6,34 g 8,404 (±4)	7,93 g 8,201 (±2)	12,40 g 8,123 (±1)	
$V^a+V^b+V^c$ im Mittel	10,27 g 8,450 (±9)	17,73 g 8,329 (±5)	23,64 g 8,155 (±2)	39,12 g 8,118 (±1)	

Messingguss Nr. 6. Vollcylinder, gegossen von Pirner und Franz in Dresden in verticale, rothglühende Form aus Schmelztiegelmasse. Die Form war in einem Glühofen aufgestellt, sodass die Abkühlung des Gusses sehr langsam vor sich ging; bis zum völligen Erkalten waren ca. zwölf Stunden erforderlich.

Die Höhe des Cylinders betrug 280 mm; der Durchmesser war nicht ganz constant, da sich die Form beim Glühen etwas geworfen hatte. Die Oberfläche des Cylinders war theilweise sehr rauh und bedurfte eines tiefergehenden Abdrehens.

Aus dem Cylinder wurden wieder sechs Scheiben in Abständen von 40—50 mm herausgeschnitten, doch zeigten sich nur die drei unteren für die Untersuchung brauchbar, da die oberen Theile des Cylinders zahlreiche Luftblasen enthielten. Auch die unteren Scheiben zeigten sich etwas porös; aus diesem

Grunde sind die Zahlen der folgenden Tabelle zum Theil mit grösseren Fehlern behaftet als die meisten früheren Bestimmungen.

Tabelle 7. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben $r = 15$ mm	Abgedreht auf $r = 13$ mm	Abgedreht auf $r = 11$ mm	Abgedreht auf $r = 9$ mm	Bemerkungen
Scheibe I	49,25 g 8,1117 (±13)				Das mittlere specifische Gewicht der drei Sectoren berechnet sich zu 8,0832, also etwas höher als das der ganzen Scheibe III. Es kann dies theils auf Rechnung des Abfalls, theils auf Rechnung der Porosität des Materials gesetzt werden.
Scheibe II	52 25 g 8,1356	37,63 g 8,0291	26,43 g 7,9650 (±7)	18,78 g 7,9404	
Scheibe III	64,80 g 8,0719				
	Die ganzen Sectoren $r = 15{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 14$ mm	Abgedreht auf $r = 11$ mm		
Sector III^a	21,46 g 8,0519	16,94 g 7,9683	9,89 g 7,9081 (±11)		
Sector III^b	20,20 g 8,1120	15,59 g 8,0152	9,25 g 7,9071 (±11)		
Sector III^c	20,80 g 8,0879 (±6)	16,51 g 7,9983 (±6)	9,77 g 7,8958		

Tabelle 7^a. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 2$ mm	Schicht 2 $d = 2$ mm	Schicht 3 $d = 2$ mm	Kern $r = 9$ mm	Bemerkungen
Scheibe II	14,62 g 8,423 (±7)	11,20 g 8,185 (±6)	7,65 g 8,026 (±7)	18,78 g 7,940 (±1)	Bei der Fehlerberechnung ist ein Fehler der ursprünglichen Bestimmungen von einer Einheit der dritten Decimale zu Grunde gelegt.
	Schicht 1 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 2 $d = 3$ mm	Kern $r = 11$ mm		
Sector III^a	4,52 g 8,382 (±9)	7,05 g 8,054 (±4)	9,89 g 7,908 (±1)		
Sector III^b	4,61 g 8,457 (±8)	6,34 g 8,178 (±4)	9,25 g 7,907 (±1)		
Sector III^c	4,29 g 8,452 (±9)	6,73 g 8,152 (±4)	9,77 g 7,896 (±1)		
III^a+III^b+III^c im Mittel	13,43 g 8,430 (±9)	20,13 g 8,125 (±4)	28,90 g 7,904 (±1)		

Messingdraht Nr. 1. Durchmesser = 21 mm. Von einem längeren Drahtstücke wurden zunächst zwei benachbarte Scheiben herabgeschnitten und deren Dichtevertheilung durch successives Abdrehen bestimmt.

Tabelle 8. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben $r = 10{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 8{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 6$ mm
Scheibe I	25,90 g 8,4816	16,78 g 8,4655	8,56 g 8,4334
Scheibe II	27,46 g 8,4813	17,43 g 8,4634	9,11 g 8,4321 (±12)

Tabelle 8ª. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 2$ mm	Schicht 2 $d = 2{,}5$ mm	Kern $r = 6$ mm
Scheibe I	9,12 g 8,512 (±3)	8,22 g 8,499 (±2)	8,56 g 8,433 (±1)
Scheibe II	10,03 g 8,513 (±3)	8,32 g 8,498 (±2)	9,11 g 8,432 (±1)

Die beiden Scheiben waren vor dem Abdrehen stark erhitzt worden; ihr specifisches Gewicht zeigte sich dadurch nicht wesentlich verändert.

Um auch hier zu constatiren, ob vielleicht durch starkes Ausglühen eine grössere Homogenität erzielt werden könne, wurden von demselben Drahtstücke nochmals drei Scheiben heruntergeschnitten, von denen Nr. III und IV im Kohlenfeuer vorsichtig geglüht und langsam abgekühlt, Nr. V dagegen zum Vergleich im rohen Zustande untersucht wurde.

Die Scheiben IV und V sind vom entgegengesetzten Ende des Drahtstückes abgeschnitten als wie I, II und III.

Es ergab sich, wie die folgende Tabelle zeigt, durch einmaliges Ausglühen gar keine nachweisbare, und auch durch wiederholtes Ausglühen nur eine sehr geringe Verminderung des Maximalbetrags der Dichteschwankungen.

Tabelle 9. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben roh	Die ganzen Scheiben geglüht	Ganze Scheibe nochmals geglüht	Abgedreht auf $r = 9$ mm	Abgedreht auf $r = 7{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 6$ mm	Bemerkungen
Scheibe III	18,39 g 8,4811	18,36 g 8,4820		13,23 g 8,4714	9,13 g 8,4602	5,92 g 8,4455	Die Bestimmungen sind nur einmal ausgeführt; der Fehler kann deshalb in den letzten Colonnen mehrere Einheiten der dritten Decimale betragen.
Scheibe IV	28,85 g 8,4892	28,82 g 8,4890	28,76 g 8,4893	20,24 g 8,4815	13,72 g 8,4699	9,76 g 8,4602	
Scheibe V	29,70 g 8,4883			21,22 g 8,4796	14,84 g 8,4693	9,18 g 8,4484	

Tabelle 9a. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 2 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 3 $d = 1{,}5$ mm	Kern $r = 6$ mm	Bemerkungen
Scheibe III 1 mal geglüht	5,13 g 8,509 (±7)	4,10 g 8,497 (±6)	3,21 g 8,487 (±5)	5,92 g 8,445 (±1)	Bei der Fehlerberechnung ist ein Fehler der ursprünglichen Bestimmungen von 1 Einheit der 3. Decimale zu Grunde gelegt.
Scheibe IV 2 mal geglüht	8,52 g 8,508 (±6)	6,51 g 8,506 (±5)	3,96 g 8,496 (±6)	9,76 g 8,460 (±1)	
Scheibe V roh	8,48 g 8,510 (±6)	6,38 g 8,504 (±6)	5,66 g 8,503 (±5)	9,18 g 8,448 (±1)	

Messingdraht Nr. 2. Durchmesser = 8,4 mm. Es wurden von dem Drahte vier verschiedene Stücke von 25 bis 65 mm Länge heruntergeschnitten und durch Bestimmung ihrer specifischen Gewichte zunächst die Dichtevertheilung des Drahtes in der Längsrichtung untersucht. Die beiden grösseren Stücke wurden dann bis auf 5,6 mm Durchmesser abgedreht und auf diese Weise die Abhängigkeit der Dichte vom Radius bestimmt.

Tabelle 10.

	Die ganzen Stücke $r = 4{,}2$ mm	Abgedreht auf $r = 2{,}8$ mm		Die ganzen Stücke $r = 4{,}2$ mm	Abgedreht auf $r = 2{,}8$ mm
Stück I	11,31 g 8,5612 (±12)		Stück III	28,41 g 8,5582 (±6)	13,95 g 8,5581 (±8)
Stück II	9,98 g 8,5587 (±9)		Stück IV	26,56 g 8,5584 (±6)	13,49 g 8,5569

Dieser dünnere Draht zeigt sich also sowohl in der Längsrichtung als auch im Querschnitt im hohen Grade homogen.

Messingblech Nr. 1. 6,5 mm dick. Das Material war durch die Handlung von Richter und Sohn in Dresden aus der Fabrik von Wieland und Comp. in Ulm bezogen. Die Form des Stückes war ungefähr rechteckig.

Die Walzrichtung war auf dem vorliegenden Stücke nicht mehr mit Sicherheit zu erkennen, ging aber vermuthlich den kürzeren Kanten des Stückes parallel.

Die Art der Zerlegung ist aus der Figur ersichtlich. Zur Untersuchung der Dichtevertheilung in der Dickenrichtung wurde Theilstück VI successive abgefeilt, Theilstück V successive abgeätzt.

Tabelle 11. (Beobachtet.)

Das ganze Stück	Theil I	Theil II	Theil III	Theil IV	Theil V	Theil VI
158,38 g 8,4826	16,10 g 8,5263	23,33 g 8,5243	20,05 g 8,5075	20,12 g 8,5074	36,95 g 8,4485	34,50 g 8,4483 (±7)

	Das ganze Stück $d = 6{,}5$ mm	Abgeätzt auf $d = 5{,}8$ mm	Abgeätzt auf $d = 5$ mm	Abgeätzt auf $d = 4$ mm	Abgeätzt auf $d = 3$ mm	Bemerkungen
Theil V	36,95 g 8,4485	31,92 g 8,4421	23,96 g 8,4336	16,58 g 8,4192 (±8)	12,81 g 8,4198	Das Abätzen ging anfangs ziemlich gleichmässig vor sich; später aber entstanden besonders an den Schnittflächen tiefe Löcher, die eine Nachhülfe mit der Feile nöthig machten. Die Bezeichnung „oben" und „unten" bei Thl. VI ist willkürlich.
	Das ganze Stück $d = 6{,}5$ mm	Oben abgefeilt $d = 5{,}7$ mm	Oben abgefeilt $d = 5$ mm	Unten abgefeilt $d = 4$ mm	Unten abgefeilt $d = 3$ mm	
Theil VI	34,50 g 8,4483 (±7)	30,53 g 8,4431	27,71 g 8,4417	22,60 g 8,4308 (±7)	17,86 g 8,4237 (±7)	

Tabelle 11ª. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 0{,}3$ mm	Schicht 2 $d = 0{,}4$ mm	Schicht 3 $d = 0{,}5$ mm	Schicht 4 $d = 0{,}5$ mm	Kern $d = 3$ mm	Bemerkungen
Theil V	5,03 g 8,489 (±7)	7,96 g 8,468 (±4)	7,38 g 8,466 (±3)	3,77 g 8,417 (±4)	12,81 g 8,420 (±1)	Bei Theil V sind die Schichten concentrisch um den Kern, bei Theil VI parallel neben einander gelagert.
	Schicht 1 $d = 0{,}3$ mm	Schicht 2 $d = 0{,}7$ mm	Schicht 3 $d = 3$ mm	Schicht 4 $d = 1$ mm	Schicht 5 $d = 1$ mm	
Theil VI	3,97 g 8,489 (±8)	2,82 g 8,457 (±11)	17,86 g 8,424 (±1)	4,74 g 8,458 (±5)	5,11 g 8,490 (±5)	

Das vorliegende Blechstück zeigt sich also in der Querrichtung (der muthmasslichen Walzrichtung) im hohen Grade homogen, während es in der Längsrichtung und ebenso in der Dickenrichtung beträchtliche Dichteschwankungen aufweist.

Die Dichtevertheilung in der Dickenrichtung zeigt bei dem abgeätzten Stücke dieselbe Anordnung wie bei dem abgefeilten; auch stimmen die Maximalbeträge der Dichteschwankungen bei beiden Stücken innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler völlig überein.

Messingblech Nr. 2. 6 mm dick. Das Material war durch Hrn. Mechanikus Leuner in Dresden aus den Messingwerken zu Grünthal im sächsischen Voigtlande bezogen. Die Länge des untersuchten Stückes betrug 100 mm, die Breite 50 mm.

I	IV
II	V
III	VI

Die Walzrichtung war auf dem vorliegenden Stücke deutlich zu erkennen; sie ging parallel den längeren Kanten.

Tabelle 12. (Beobachtet.)

Theil I	Theil II	Theil III	Theil IV	Theil V	Theil VI
38,44 g 8,4405 (± 6)	40,62 g 8,4405 (± 6)	41,14 g 8,4405	39,88 8,4403	37,98 g 8,4416	37,10 g 8,4409

	Das ganze Stück $d = 6$ mm	Oben abgefeilt $d = 4{,}5$ mm	Unten abgefeilt $d = 3$ mm
Theil III	41,14 g 8,4405	30,40 g 8,4423	20,72 g 8,4436

Tabelle 12a. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 2 (Kern) $d = 3$ mm	Schicht 3 $d = 1{,}5$ mm
Theil III	10,74 g 8,435 (± 4)	20,72 g 8,444 (± 1)	9,68 g 8,439 (± 3)

Das vorliegende Stück zeigt sich also in der Längs- und Querrichtung völlig homogen, während es in der Dickenrichtung eine geringe Dichtezunahme von aussen nach innen aufweist.

Messingblech Nr. 3. 2,5 mm dick. Das Material stammte gleichfalls aus den Grünthaler Messingwerken. Die Länge des vorliegenden Stückes betrug 100 mm, die Breite 50 mm. Die Walzrichtung ging parallel den Längskanten.

Tabelle 13.

Theil I	Theil II	Theil III	Theil IV	Theil V	Theil VI
16,67 g 8,4483	16,22 g 8,4481	19,21 g 8,4486 (± 7)	17,40 g 8,4453 (± 6)	15,66 8,4447	17,69 g 8,4451

	Das ganze Stück $d = 2{,}5$ mm	Beiderseits abgefeilt $d = 1{,}5$ mm
Theil III	19,21 g 8,4486 (± 7)	12,98 g 8,4487

Das vorliegende Stück zeigt sich also in der Längsrichtung (der Walzrichtung) und in der Dickenrichtung vollkommen homogen, während es in der Querrichtung eine geringe Dichteänderung aufweist.

b. Zink.

Das direct untersuchte Zink stammte ebenso wie das zu den Gussarbeiten in Messing verwendete aus den v. Giesche'schen Zinkwerken „Paulshütte" in Oberschlesien. Den ersten der beiden Untersuchungskörper habe ich selbst gegossen; der Guss des zweiten wurde wieder durch die Herren Kunstgiesser Pirner und Franz in Dresden ausgeführt.

Zinkguss Nr. 1. Vollscheibe, gegossen in angewärmte, offene gusseiserne Form. Der Durchmesser der Scheibe betrug nach dem Abdrehen der Gusshaut 73,5 mm, die Dicke 7,2 mm.

Die ganze Scheibe wurde in vier Sectoren zerschnitten und diese Sectoren zunächst, um die Dichtevertheilung bei variirendem Radius zu bestimmen, an ihrer cylindrischen Begrenzungsfläche successive abgedreht. Die zuletzt rückbleibenden Kerne wurden dann, um auch die Dichtevertheilung in der

Dickenrichtung zu untersuchen, noch an ihren ebenen Begrenzungsflächen successive abgedreht.

Tabelle 14. (Beobachtet.)

	Die ganzen Sectoren $r = 36{,}7$ mm	Abgedreht auf $r = 31{,}7$ mm	Abgedreht auf $r = 26{,}7$ mm	Unten abgedreht $d = 6{,}6$ mm	Unten abgedreht $d = 5{,}4$ mm	Oben abgedreht $d = 4$ mm	Bemerkungen
Sector I	55,61 g 7,1692	41,49 g 7,1695	29,36 g 7,1708	27,20 g 7,1713 (±6)	20,71 g 7,1689	13,77 g 7,1692	Die Bezeichnungen „unten" u. „oben" gelten für die Lage der Scheibe in der horizontalen Gussform.
Sector II	50,46 g 7,1695	37,98 g 7,1699	26,47 g 7,1703	24,49 g 7,1712 (±15)	19,94 g 7,1692	12,96 g 7,1696	
Sector III	52,75 g 7,1697	40,77 g 7,1697	28,45 g 7,1712	26,37 g 7,1708 (±10)	21,07 g 7,1688	13,87 g 7,1701	
Sector IV	51,66 g 7,1692	39,00 g 7,1690	27,20 g 7,1705	25,32 g 7,1703 (±8)	20,93 g 7,1675	13,26 g 7,1684 (±6)	

Tabelle 14a. (Berechnet.)

	Concentrische Schichten			Parallele Schichten				Bemerkungen
	Schicht 1	Schicht 2	Kern	Schicht a	Schicht b	Schicht c (Kern)	Schicht d	
Sector I	14,12 g 7,168 (±4)	12,13 g 7,166 (±3)	29,36 g 7,171 (±1)	2,16 g 7,166 (±13)	6,49 g 7,179 (±4)	13,77 g 7,169 (±1)	6,94 g 7,168 (±3)	Die concentrischen Schichten sind von aussen nach innen, die parallelen von unten nach oben gezählt.
Sector II	12,48 g 7,168 (±4)	11,51 g 7,169 (±3)	26,47 g 7,170 (±1)	1,98 g 7,158 (±13)	4,55 g 7,180 (±5)	12,96 g 7,170 (±1)	6,98 g 7,169 (±3)	
Sector III	11,98 g 7,170 (±4)	12,32 g 7,166 (±3)	28,45 g 7,171 (±1)	2,08 g 7,177 (±13)	5,30 g 7,178 (±5)	13,87 g 7,170 (±1)	7,20 g 7,166 (±3)	
Sector IV	12,66 g 7,170 (±4)	11,80 g 7,166 (±3)	27,20 g 7,170 (±1)	1,88 g 7,172 (±14)	4,39 g 7,184 (±5)	13,26 g 7,168 (±1)	7,67 g 7,166 (±3)	

Bei dem zweiten Abdrehen, also von Schicht 2, wurde ein Theil der Drehspähne gesammelt und ihre Dichte pyknometrisch bestimmt. Es fand sich $s = 7{,}09$; doch dürfte dieser Werth, da die Bestimmung nicht wiederholt werden konnte, höchstens auf 1 Proc. zuverlässig sein.

Zinkguss Nr. 2. Vollcylinder, gegossen in verticale Sandform. Die Höhe des Cylinders betrug ca. 280 mm, der Durchmesser nach dem Abdrehen der Gusshaut 38 mm. Im oberen Theile des Cylinders hatte sich beim Erstarren eine etwa 100 mm tiefe, nach unten conisch verlaufende Höhlung gebildet.

Aus dem Cylinder wurden vier Scheiben von ca. 40 mm gegenseitigem Abstand herausgeschnitten, die von unten nach oben mit I bis IV bezeichnet sind. Die Scheiben II und IV wurden successive abgedreht; die Scheibe III diametral in zwei Theile zerschnitten.

Tabelle 15. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben $r = 19$ mm	Abgedreht auf $r = 15$ mm	Abgedreht auf $r = 12$ mm
Scheibe I	70,68 g 7,1696		
Scheibe II	66,65 g 7,1717	42,47 g 7,1719	26,68 g 7,1718
Scheibe III	65,10 g 7,1716(±7)		
Scheibe IV	67,02 g 7,1708(±6)	42,28 g 7,1718	26,76 g 7,1718
Halbscheibe III[a]	30,95 g 7,1818		
Halbscheibe III[b]	31,77 g 7,1718(±6)		

Tabelle 15[a]. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 4$ mm	Schicht 2 $d = 3$ mm	Kern $r = 12$ mm
Scheibe II	24,18 g 7,171(±2)	15,79 g 7,172(±2)	26,68 g 7,172(±1)
Scheibe IV	24,74 g 7,169(±2)	15,52 g 7,172(±2)	26,76 g 7,172(±1)

Da Zink in den beiden untersuchten Gussstücken sich im hohen Grade homogen erwiesen hat, wurde eine Untersuchung dieses Metalles in anderen Formen technischer Verarbeitung nicht vorgenommen.

c. Kupfer.

Die Gussarbeiten in Kupfer wurden für die Untersuchungskörper Nr. 1 bis Nr. 4 durch Herrn J. Ostler in Würzburg ausgeführt. Das Material zu diesen Gussstücken war Rohkupfer und Kupferabfall, wie ihn Herr Ostler in seiner Werkstätte eben vorräthig hatte, und dessen Bezugsquelle nicht angegeben

werden konnte. Die kleineren Gussstücke Nr. 2—4 sollten durch Umschmelzen der von dem ersteren grösseren Untersuchungskörper zurückgebliebenen Theile gewonnen werden; da ich aber die Herstellung nicht persönlich überwachen konnte, vermag ich nicht dafür zu bürgen, dass das Material beim Umschmelzen keine Verunreinigung erfahren hat.

Das Gussstück Nr. 5 ist aus electrolytischem Kupfer hergestellt, das ich von der Firma Hesse Söhne in Heddernheim bei Frankfurt bezogen hatte. Die Ausführung des Gusses bereitete erhebliche Schwierigkeiten, da auch nach wiederholtem Umschmelzen in verschiedenen Giessereien das Material sich immer wieder im hohen Grade blasig zeigte, bis es endlich Herrn W. G. Otto in Darmstadt gelang, einen vollkommen blasenfreien Guss zu liefern.

Kupferguss Nr. 1. Vollcylinder, gegossen von J. Ostler in verticale Sandform. Die Höhe des Cylinders betrug ca. 100 mm, der Durchmesser nach dem Abdrehen der Gusshaut 49 mm.

Tabelle 16. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben $r = 24{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 22{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 20$ mm	Abgedreht auf $r = 16$ mm	Abgedreht auf $r = 10$ mm	Bemerkungen
Scheibe I	129,17 g 8,8411	111,20 g 8,8415	89,30 g 8,8410	56,74 g 8,8410	19,32 g 8,8387	Die mittlere Dichte der drei Sectoren III a, III b, III c berechnet sich zu 8,8373, gegen 8,8360 der ganzen Scheibe III. Beide Zahlen sind indess nicht ganz zuverlässig, da die Scheibe einen mehrere Millimeter tiefen Gussriss besass, der erst bei den abgedrehten Sectoren in Wegfall kommt.
Scheibe II	132,56 g 8,8397	110,18 g 8,8395	88,49 g 8,8380	56,11 g 8,8361	21,07 g 8,8288	
Scheibe III	136,08 g 8,8360					
Scheibe IV	126,50 g 8,8382					
	Die ganzen Sectoren $r = 24{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 20$ mm				
Sector III^a	41,68 g 8,8419	28,67 g 8,8395				
Sector III^b	41,91 g 8,8381	28,85 g 8,8363				
Sector III^c	44,34 g 8,8323 (±6)	31,07 g 8,8401 (±6)				

Tabelle 16ª. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 2$ mm	Schicht 2 $d = 2{,}5$ mm	Schicht 3 $d = 4$ mm	Schicht 4 $d = 6$ mm	Kern $r = 10$ mm	Bemerkungen
Scheibe I	17,97 g 8,839 (± 7)	21,93 g 8,843 (± 5)	32,56 g 8,841 (± 3)	37,42 g 8,842 (± 1)	19,32 g 8,839 (± 1)	Die äussere Schicht des Sectors III c enthielt den Gussriss; desshalb hier die geringere Dichte.
Scheibe II	22,38 g 8,841 (± 6)	21,68 g 8,845 (± 5)	32,39 g 8,841 (± 3)	35,04 g 8,840 (± 1)	21,07 g 8,829 (± 1)	

	Schicht 1 $d = 4{,}5$ mm	Kern $r = 20$ mm
Sector IIIª	13,01 g 8,847 (± 3)	28,67 g 8,839 (± 1)
Sector IIIᵇ	13,06 g 8,842 (± 3)	28,85 g 8,836 (± 1)
Sector IIIᶜ	13,27 g 8,814 (± 3)	31,07 g 8,840 (± 1)

Die Scheiben sind senkrecht zur Axe in Abständen von je 32 mm herausgeschnitten und sind von unten nach oben mit I bis IV bezeichnet. Die Dicke der Scheiben betrug ca. 8 mm.

Kupferguss Nr. 2. Vollscheibe; Durchmesser 62 mm, Höhe 12,5 mm (die Dimensionen gemessen nach dem Abdrehen der Oberfläche). Die Scheibe wurde zunächst diametral in zwei Halbscheiben zerschnitten und diese dann successive abgedreht.

Tabelle 17. (Beobachtet.)

	Die ganzen Stücke $r = 31$ mm	Abgedreht auf $r = 25$ mm	Abgedreht auf $r = 15$ mm
Halbscheibe I	157,07 g 8,5443	98,48 g 8,5340	53,17 g 8,5095
Halbscheibe II	155,06 g 8,5261	93,89 g 8,5235	50,56 g 8,5073

Tabelle 17ª. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 6$ mm	Schicht 2 $d = 10$ mm	Kern $r = 15$ mm
Halbscheibe I	58,59 g 8,577 (± 2)	45,31 g 8,563 (± 2)	53,17 g 8,510 (± 1)
Halbscheibe II	61,17 g 8,530 (± 2)	43,33 g 8,543 (± 2)	50,56 g 8,507 (± 1)

Kupferguss Nr. 3. Vollcylinder; Durchmesser ca. 35 mm, Höhe 30 mm. Der Cylinder wurde senkrecht zur Axe in drei Scheiben zerschnitten, die von unten nach oben mit I, II, III bezeichnet sind. Scheibe III wurde dann successive abgedreht.

Tabelle 18. (Beobachtet.)

	Die ganzen Scheiben $r = 17{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 15$ mm	Abgedreht auf $r = 12$ mm
Scheibe I	66,00 g 8,5756		
Scheibe II	93,81 g 8,5506	66,56 g 8,5920	42,08 g 8,5957
Scheibe III	59,99 g 8,5474		

Tabelle 18ª. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 2{,}5$ mm	Schicht 2 $d = 3$ mm	Kern $r = 12$ mm
Scheibe II	27,25 g 8,451 (± 3)	24,48 g 8,586 (± 2)	42,08 g 8,596 (± 1)

Kupferguss Nr. 4. Vollcylinder; Durchmesser ca. 20 mm, Höhe 90 mm. Der ganze Cylinder wurde senkrecht zur Axe in zwei Theile zerschnitten; der eine Theil wurde successive abgeätzt, der andere successive abgedreht. Welcher von beiden Theilen beim Giessen der obere, und welcher der untere gewesen war, liess sich nicht mehr mit Sicherheit erkennen.

Tabelle 19. (Beobachtet.)

	Das ganze Stück $r = 10$ mm	Abgeätzt auf $r = 9$ mm	Abgeätzt auf $r = 7{,}5$ mm	Abgeätzt auf $r = 5{,}5$ mm	Bemerkungen
Theil I	113,48 g 8,8665	92,24 g 8,8672	68,70 g 8,8643	28,32 g 8,8560	Beim Abätzen entstanden an der einen Basisfläche vereinzelte, ziemlich tiefgehende Löcher, flachere Löcher entstanden auch an der Mantelfläche.
	Das ganze Stück $r = 10$ mm	Abgedreht auf $r = 9$ mm	Abgedreht auf $r = 7{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 5$ mm	
Theil II	123,04 g 8,8716	94,40 g 8,8718	68,89 g 8,8689	29,21 g 8,8618	

Tabelle 19a. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 1$ mm	Schicht 2 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 3 $d = 2$ mm	Kern $r = 5{,}5$ mm
Theil I	21,24 g 8,864 (±5)	23,54 g 8,875 (±3)	40,38 g 8,870 (±1)	28,32 g 8,856 (±1)
	Schicht 1 $d = 1$ mm	Schicht 2 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 3 $d = 2{,}5$ mm	Kern $r = 5$ mm
Theil II	28,64 g 8,871 (±4)	25,51 g 8,880 (±3)	39,68 g 8, 874 (±1)	29,21 g 8,862 (±1)

Um den Einfluss starker Erwärmung zu untersuchen, wurde der Rest von Theil II zunächst bis zum Blauanlaufen erhitzt und an der Luft erkalten gelassen, dann noch einmal bis zur hellen Rothgluth erhitzt und in Wasser rasch abgekühlt. Es fand sich bei beiden Versuchen:

a) $m = 29{,}18$ g $\quad s = 8{,}8616$ b) $m = 29{,}07$ g $\quad s = 8{,}8614.$

Die Dichte des Körpers ist also durch das starke Erhitzen nicht merklich geändert worden.

Die auffällige Verschiedenheit, welche die Gussstücke Nr. 2 und 3 gegen die Stücke 1 und 4 sowohl in ihrer mittleren Dichte als auch im Betrage der Dichteschwankungen zeigen, veranlasste mich, einen Theil der vom Gussstück 3 gewonnenen

Drehspähne einer chemischen Analyse zu unterwerfen, da ich den Grund dieser Verschiedenheit zunächst in chemischen Verunreinigungen des Materials suchte. Indessen liessen sich ausser geringfügigen Spuren von Zinn und Eisen keine fremden Beimischungen nachweisen, sodass die gedachten Verschiedenheiten in der Hauptsache physikalisch begründet sein mussten. In der That zeigte sich dann beim Abätzen verschiedener Theile der Gussstücke 2 und 3, dass diese Körper von äusserst zahlreichen, feinen Luftblasen durchsetzt waren, welche durch die mechanische Bearbeitung des Materials an der Oberfläche zugedrückt und selbst der mikroskopischen Betrachtung unzugänglich gemacht worden waren.

Eines der abgeätzten Stücke (Scheibe II des Gussstückes 3) wurde gewogen und dann in Wasser unter den Recipienten der Luftpumpe gebracht, um die von aussen zugänglichen Löcher mit Wasser zu sättigen. Das Gewicht des Körpers stieg dadurch nur um etwa 2 mg, der Körper vermochte also nur sehr wenig Wasser in sich aufnehmen. Es folgt daraus, dass entweder die im Innern des Körpers befindlichen Poren, deren Volumen nach dem geringen specifischen Gewichte des Körpers auf mehrere Procente des Gesammtvolumens geschätzt werden muss, von aussen nicht zugänglich waren, oder, was wahrscheinlicher ist, dass der Capillardruck des Wassers in den Mündungen der Poren die Expansionskraft der eingeschlossenen Luft überwog.

Ein zum Vergleich ebenfalls abgeätztes Stück des Gusses Nr. 1 blieb hierbei vollkommen glatt und dicht.

Kupferguss Nr. 5. Vollcylinder, gegossen von Herrn W. G. Otto in Darmstadt in verticale Sandform. Das Material zu diesem Gusse war, wie schon bemerkt, electrolytisch niedergeschlagenes Kupfer von Hesse Söhne in Heddernheim, dessen specifisches Gewicht an einem Probestücke zu 8,9113 bestimmt wurde. Der Durchmesser des Cylinders betrug nach dem Abdrehen der Gusshaut 30 mm, die Höhe ca. 270 mm.

Etwa in der Mitte des Cylinders befand sich ein querlaufender Gussriss; der ganze Theil des Cylinders oberhalb dieses Risses zeigte sich im Innern birnenförmig ausgehöhlt

im übrigen erwies sich das Material jedoch völlig blasenfrei. Wie Herr Otto mir auf Befragen mittheilte, ist diese Erscheinung der Aushöhlung der oberen Partien beim Erhalten dichten Kupfergusses eine ganz allgemeine, sodass sie geradezu ein Kriterium für die Güte des Gusses bildet.

Der untere, massive Theil des Cylinders wurde senkrecht zur Axe in vier Stücke zerschnitten, die von unten anfangend mit I bis IV bezeichnet sind. Stück III wurde dann noch längs der Axe in zwei Theile, IIIa und IIIb zerschnitten. Aus dem oberen, hohlen Theile des Cylinders wurden zwei Scheiben, V und VI herausgestochen, von denen die erste etwa in der Mitte, die zweite am oberen Ende des hohlen Theils gelegen war; die Höhlung wurde bei beiden glatt ausgedreht. Die Stücke I und II wurden successive abgedreht, die Stücke IIIa und IIIb an der Schnittfläche mit Siegellack zusammengekittet und in verdünnter Salpetersäure successive abgeätzt.

Tabelle 20. (Beobachtet.)

	Die ganzen Stücke $r = 15$ mm	Abgedreht auf $r = 12{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 10$ mm	Abgedreht auf $r = 7{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 5$ mm	Bemerkungen.
Theil I	199,09 g 8,8683	135,50 g 8,8762	85,83 g 8,8801	47,86 g 8,8806	21,96 g 8,8793	Die ersten beiden Werthe für Theil I sind etwas zu niedrig, da die Oberflächenschichten dieses Theiles noch Beimengungen von Formsand enthielten.
Theil II	138,44 g 8,8759	96,61 g 8,8764	60,24 g 8,8776	33,12 g 8,8830		
	Die ganzen Stücke $r = 15$ mm	Abgeätzt auf $r = 14$ mm	Abgeätzt auf $r = 13$ mm	Abgeätzt auf $r = 11{,}5$ mm	Abgeätzt auf $r = 9{,}5$ mm	
Theil III^a	85,95 g 8,8678	70,53 g 8,8641	56,22 g 8,8631	41,03 g 8,8652	22,75 g 8,8641	
Theil III^b	85,35 g 8,8662	69,96 g 4,8618	55,95 g 8,8604	41,26 g 8,8584	23,02 g 8,8580	
Theil IV	84,52 g 8,8572					
Theil V	47,31 g 8,8780					
Theil VI	24,94 g 8,8856					

Tabelle 20[a]. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 2{,}5$ mm	Schicht 2 $d = 2{,}5$ mm	Schicht 3 $d = 2{,}5$ mm	Schicht 4 $d = 2{,}5$ mm	Kern	Bemerkungen
Theil I	63,59 g 8,852 (±3)	49,67 g 8,869 (±3)	37,97 g 8,879 (±2)	25,90 g 8,882 (±1)	21,96 g 8,879 (±1)	[2] Die geringere Dichte der Schichten 1 und 2 des Theiles I rührt von den Beimengungen von Formsand her.
Theil II	41,83 g 8,875 (±3)	36,37 g 8,874 (±3)	27,12 g 8,871 (±2)		33,12 g 8,883 (±1)	
	Schicht 1 $d = 1$ mm	Schicht 2 $d = 1$ mm	Schicht 3 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 4 $d = 2$ mm	Kern $r = 9{,}5$ mm	
Theil III[a]	15,42 g 8,885 (±5)	14,31 g 8,868 (±5)	15,19 g 8,857 (±4)	18,28 g 8,867 (±2)	22,75 g 8,864 (±1)	
Theil III[b]	15,39 g 8,886 (±5)	14,01 g 8,868 (±5)	14,69 g 8,866 (±4)	18,24 g 8,859 (±2)	23,02 g 8,858 (±1)	
III[a] + III[b] im Mittel	30,81 g 8,885 (±5)	28,32 g 8,868 (±5)	29,88 g 8,861 (±4)	36,52 g 8,863 (±2)	45,77 g 8,861 (±1)	

Kupferdraht. 20 mm dick. Das Material war durch Herrn E. Hartmann in Würzburg von der Firma Basse und Selve in Altona bezogen.

Das ganze Drahtstück wurde senkrecht zur Axe in vier Theile von ca. 20 mm Länge zerschnitten; zwei dieser Theilstücke wurden successive abgedreht, ein drittes zum Vergleich successive abgeätzt.

Tabelle 21. (Beobachtet.)

	Das ganze Stück $r = 10$ mm	Abgeätzt auf $r = 8{,}5$ mm	Abgeätzt auf $r = 7$ mm	Abgeätzt auf $r = 6$ mm
Theil I	61,20 g 8,8852	43,54 g 8,8885	25,70 g 8,8889	17,19 g 8,8882 (±8)
	Die ganzen Stücke $r = 10$ mm	Abgedreht auf $r = 9$ mm	Abgedreht auf $r = 7{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 5{,}5$ mm
Theil II	62,18 g 8,8845	50,15 g 8,8873	32,31 g 8,8879 (±7)	16,63 g 8,8893 (±6)
Theil III	61,34 g 8,8850	46,62 g 8,8881	32,73 g 8,8880 (±7)	17,47 g 8,8879
Theil IV	55,52 g 8,8854			

Tabelle 21[a]. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 2 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 3 $d = 1$ mm	Kern $r = 6$ mm
Theil I	17,66 g 8,877 (± 3)	17,84 g 8,888 (± 2)	8,51 g 8,890 (± 3)	17,19 g 8,888 (± 1)
	Schicht 1 $d = 1$ mm	Schicht 2 $d = 1{,}5$ mm	Schicht 3 $d = 2$ mm	Kern $r = 5{,}5$ mm
Theil II	12,03 g 8,873 (± 5)	17,84 g 8,886 (± 3)	15,68 g 8,887 (± 2)	16,63 g 8,889 (± 1)
Theil III	14,72 g 8,875 (± 4)	13,89 g 8,888 (± 3)	15,26 g 8,888 (± 2)	17,47 g 8,888 (± 1)

Kupferblech. 9 mm dick. Das Material war gleichfalls von der Firma Basse und Selve in Altona bezogen. Die Länge des rechteckigen Untersuchungsstückes betrug 110 mm, die Breite 44 mm. Die Walzrichtung war auf dem vorliegenden Stücke nicht zu erkennen.

I	III	V
II	IV	VI

Theil V wurde successive abgeätzt, Theil VI an den Walzflächen successive abgefeilt.

Tabelle 22. (Beobachtet.)

	Die ganzen Stücke $d = 9$ mm				
Theil I	34,05 g 8,9023				
Theil II	33,35 g 8,9017				
Theil III	33,25 g 8,9041 (± 9)				
Theil IV	30,52 g 8,9035 (± 10)				
	Das ganze Stück $d = 9$ mm	Abgeätzt auf $d = 7{,}7$ mm	Abgeätzt auf $d = 5{,}7$ mm	Abgeätzt auf $d = 4{,}4$ mm	
Theil V	70,13 g 8,9040	53,43 g 8,9060	33,73 g 8,9070	22,91 g 8,9069	

	Das ganze Stück $d = 9$ mm					Bemerkungen
	Das ganze Stück $d = 9$ mm	Oben abgefeilt $d = 8$ mm	Oben abgefeilt $d = 7$ mm	Unten abgefeilt $d = 6$ mm	Unten abgefeilt $d = 5$ mm	Die Bezeichnungen „oben“ und „unten“ sind willkürlich.
Theil VI	66,70 g 8,9023	59,55 g 8,9021	49,60 g 8,9009	43,40 g 8,9020	37,17 g 8,9029	

Tabelle 22a. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 0{,}7$ mm	Schicht 2 $d = 1$ mm	Schicht 3 $d = 0{,}6$ mm	Kern $d = 4{,}4$ mm		Bemerkungen
Theil V	16,70 g 8,898 (±4)	19,70 g 8,904 (±3)	10,82 g 8,907 (±3)	22,91 g 8,907 (±1)		Bei Theil V sind die Schichten concentrisch um den Kern, bei Theil VI parallel über einander gelagert.
	Schicht 1 $d = 1$ mm	Schicht 2 $d = 1$ mm	Schicht 3 $d = 5$ mm	Schicht 4 $d = 1$ mm	Schicht 5 $d = 1$ mm	
Theil VI	7,12 g 8,904 (±9)	9,95 g 8,908 (±6)	31,17 g 8,903 (±1)	6,23 g 8,897 (±10)	6,20 g 8,893 (±11)	

d. Eisen und Stahl.

Die Untersuchungskörper in Gusseisen wurden hergestellt in der Eisengiesserei von J. Reinhardt in Würzburg-Grombühl. Das Material war gewöhnliches, graues Roheisen, eine der kohlenstoffreichsten Eisensorten. Die Qualität des Gusses war im allgemeinen eine sehr gute; nur an der Oberfläche zeigten die Gussstücke stellenweise tiefergehende Löcher, die dann immer sorgfältig ausgebohrt wurden, während im Innern das Material sich mit wenigen, geringfügigen Ausnahmen blasenfrei erwies.

Gusseisen Nr. 1. Flacher Cylinder, Durchmesser 72 mm, Höhe 27,5 mm. Das Gussstück wurde aus dem Vorrathe der Fabrik bezogen, die Lage desselben beim Giessen ist mir deshalb nicht bekannt.

Der ganze Cylinder wurde zunächst diametral in zwei Theile zerlegt, indem eine Reihe Löcher dicht neben einander gebohrt und das Gussstück dann mit dem Meisel zersprengt wurde;

die Sprengflächen wurden glatt gefeilt. Hierbei ging ein Streifen des Materials von ca. 10 mm Breite verloren.

Das eine Theilstück zeigte in der Schnittfläche eine grössere Gussblase, die durch glattes Ausbohren unschädlich gemacht wurde. Im übrigen zeigten sich beide Stücke beim späteren Abdrehen blasenfrei.

Tabelle 23. (Beobachtet.)

	Die ganzen Stücke $r = 36$, $h = 27{,}5$	Abgedreht auf $r = 30$	Abgedreht auf $r = 24$	Oben abgedreht $h = 22{,}5$	Unten abgedreht $h = 17{,}5$	Bemerkungen
Theil I	315,13 g 7,0854	203,67 g 7,0843	116,53 g 7,0786	100,54 g 7,0818	76,75 g 7,0777	Die Bezeichnungen „oben" und „unten" sind willkürlich.
Theil II	325,01 g 7,0833	221,40 g 7,0766	134,40 g 7,0672	115,65 g 7,0711	87,53 g 7,0616	

Tabelle 23[a]. (Berechnet.)

	Concentrische Schichten			Parallele Schichten		
	Schicht 1	Schicht 2	Kern	Schicht a	Schicht b Kern	Schicht c
Theil I	111,46 g 7,087 (±3)	87,11 g 7,090 (±2)	116,53 g 7,079 (±1)	15,99 g 7,058 (±7)	76,75 g 7,078 (±1)	23,79 g 7,095 (±4)
Theil II	113,61 g 7,098 (±3)	87,00 g 7,091 (±2)	134,40 g 7,067 (±1)	18,75 g 7,042 (±7)	87,53 g 7,062 (±1)	28,12 g 7,102 (±4)

Um den Einfluss starker Erwärmung im Sinne einer etwaigen Dichteänderung zu untersuchen, wurde der Rest von Theil I im Gasgebläse bis zum Schwarzanlaufen erhitzt und an der Luft erkalten lassen; der Rest von Theil II ebenfalls bis zum Schwarzanlaufen erhitzt und in Wasser abgelöscht. Es fand sich:

Theil I: $m = 76{,}73$ g $s = 7{,}0772$ Theil II: $m = 87{,}52$ g $s = 7{,}0607$.

Gusseisen Nr. 2. Hohlcylinder, gegossen in verticale Sandform. Der äussere Durchmesser betrug nach dem Abdrehen der Gusshaut 58,5 mm, der innere Durchmesser 40,5 mm, die Höhe 38 mm. An der Oberfläche zeigten sich nach dem Abdrehen der Gusshaut einige Löcher, die möglichst glatt ausgebohrt und ausgefeilt wurden.

Der ganze Hohlcylinder wurde zunächst senkrecht zur Axe in zwei einzelne Ringe zerschnitten, die von unten nach oben mit I und II bezeichnet sind; die Höhe jedes derselben betrug etwa 18 mm. Der Ring II wurde noch diametral in zwei Hälften IIa und IIb zerschnitten und dann successive abgedreht, während Ring I zum Vergleiche successive abgeätzt wurde. Beim Abdrehen des Ringes II zeigten sich auch im Innern des Materials mehrere kleine Gussblasen, deren Einfluss auf das specifische Gewicht aber höchstens auf ein bis zwei Einheiten der dritten Decimale zu veranschlagen ist; Ring I erwies sich beim Abätzen als blasenfrei.

Tabelle 24. (Beobachtet.)

	Der ganze Ring $r_1 = 29{,}2$; $r_2 = 20{,}2$	Abgeätzt auf $r_1 = 28{,}3$; $r_2 = 21{,}1$	Abgeätzt auf $r_1 = 27{,}6$; $r_2 = 21{,}8$	Abgeätzt auf $r_1 = 27{,}0$; $r_2 = 22{,}4$
Ring I	185,04 g 7,1331	134,72 g 7,1273	98,07 g 7,1302	71,26 g 7,1323
	Die ganzen Stücke $r_1 = 29{,}2$; $r_2 = 20{,}2$	Innen abgedreht $r_1 = 29{,}2$; $r_2 = 22{,}2$	Aussen abgedreht $r_1 = 27{,}2$; $r_2 = 22{,}2$	
Halbring IIa	89,56 g 7,1111	70,37 g 7,1219	46,11 g 7,1153	
Halbring IIb	91,89 g 7,1213	72,38 g 7,1299	47,33 g 7,1257	

Tabelle 24a. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 0{,}9$ mm	Schicht 2 $d = 0{,}7$ mm	Schicht 3 $d = 0{,}6$ mm	Kern $d = 4{,}6$ mm	Bemerkungen
Ring I	50,32 g 7,149 (±3)	36,65 g 7,120 (±3)	26,81 g 7,125 (±3)	71,26 g 7,132 (±1)	Bei der Fehlerberechnung ist für Ring I ein Fehler von 5 Einheiten der 4., für Ring II ein solcher von 1 Einheit der 3. Decimale in den ursprünglichen Bestimmungen zu Grunde gelegt. Die Schichten des Ringes II sind vom äusseren Rande ab gezählt.
	Schicht 1 $d = 2$ mm	Schicht 2 (Kern) $d = 5$ mm	Schicht 3 $d = 2$ mm		
Halbring IIa	24,26 g 7,135 (±5)	46,11 g 7,115 (±1)	19,19 g 7,072 (±8)		
Halbring IIb	25,05 g 7,138 (±5)	47,33 g 7,126 (±1)	19,51 g 7,089 (±8)		

Gusseisen Nr. 3. Vollcylinder, gegossen in horizontale Sandform. Die Länge des Cylinders betrug ca. 100 mm, der Durchmesser nach dem Abdrehen der Gusshaut 30 mm.

Der ganze Cylinder wurde senkrecht zur Axe in vier Theile zerlegt, die in ihrer Aufeinanderfolge mit I bis IV bezeichnet sind. Theil I wurde ausserdem noch längs der Axe in zwei Stücke, Ia und Ib zerschnitten, von denen Ia der beim Giessen zu oberst gelegenen Hälfte des Cylinders angehört. Die Theile I und III wurden successive abgedreht, Theil II zum Vergleiche successive abgeätzt.

Die Oberfläche des Cylinders zeigte auch nach dem Abdrehen der Gusshaut im oberen Theile der Mantelfläche verschiedene Löcher, die so gut als möglich ausgebohrt und ausgefeilt wurden. Die Schnittflächen waren dagegen durchaus blasenfrei; ebenso zeigten sich beim Abdrehen und Abätzen der einzelnen Stücke keine Blasen.

Tabelle 25. (Beobachtet.)

	Die ganzen Stücke $r = 15$ mm	Abgedreht auf $r = 12{,}5$ mm	Abgedreht auf $r = 10$ mm	
Theil I^a	56,10 g 7,1389	40,03 g 7,1422	26,36 g 7,1432	
Theil I^b	56,87 g 7,1470	39,51 g 7,1449	26,10 g 7,1400	
	Das ganze Stück $r = 15$ mm	Abgeätzt auf $r = 13$ mm	Abgeätzt auf $r = 11$ mm	Abgeätzt auf $r = 9$ mm
Theil II	117,89 g 7,1374	69,78 g 7,1315	42,82 g 7,1316	21,17 g 7,1335
	Die ganzen Stücke $r = 15$ mm	Abgedreht auf $r = 12{,}4$	Abgedreht auf $r = 10$ mm	Abgedreht auf $r = 7{,}5$ mm
Theil III	114,43 g 7,1370	75,71 g 7,1330	48,46 g 7,1312	26,94 g 7,1329
Theil IV	117,31 g 7,1437			

Tabelle 25ª. (Berechnet.)

	Schicht 1 $d = 2{,}5$ mm	Schicht 2 $d = 2{,}5$ mm	Kern $r = 10$ mm	
Theil Iª	16,07 g 7,131 (±3)	13,67 g 7,140 (±2)	26,36 g 7,143 (±1)	
Theil Iᵇ	17,36 g 7,152 (±3)	13,41 g 7,146 (±3)	26,10 g 7,144 (±1)	
	Schicht 1 $d = 2$ mm	Schicht 2 $d = 2$ mm	Schicht 3 $d = 2$ mm	Kern $r = 9$ mm
Theil II	48,11 g 7,146 (±2)	26,96 g 7,131 (±2)	21,65 g 7,130 (±2)	21,17 g 7,133 (±1)
	Schicht 1 $d = 2{,}6$ mm	Schicht 2 $d = 2{,}4$ mm	Schicht 3 $d = 2{,}5$ mm	Kern $r = 7{,}5$ mm
Theil III	38,72 g 7,145 (±3)	27,25 g 7,136 (±3)	21,52 g 7,129 (±2)	26,94 g 7,133 (±1)

Das Material für die folgenden Untersuchungskörper ist Wolframstahl, der durch Hrn. E. Hartmann in Würzburg von der Firma Goldacker und Nesselrode in Berlin bezogen wurde. Das Material ist zunächst gegossen, dann in rohe Stäbe geschmiedet, endlich im glühenden Zustande mittelst ausgekehlter Walzen in die betreffenden Stabformen gewalzt; es hat also eine sehr durchgreifende mechanische Bearbeitung erfahren.

Die Untersuchung richtet sich im Folgenden zunächst auf die Aenderung der mittleren Dichte der Untersuchungskörper durch Ausglühen und Ablöschen, dann aber vornehmlich auf die Dichtevertheilung in den Körpern im rohen, ausgeglühten und gehärteten Zustande. Um zu entscheiden, ob die Dichtevertheilung durch das Härten eine Aenderung erfahre, sind immer benachbarte Theile desselben Körpers theils im rohen, theils in gehärteten Zustande untersucht worden. Die successive Verkleinerung der Untersuchungskörper geschah hier durchweg durch Abätzen mittelst verdünnter Salpetersäure.

Walzstahl Nr. 1. Drahtförmiger Wolframstahl von 10 mm Dicke; die Länge des untersuchten Stückes betrug ca. 350 mm.

Es wurden zunächst von dem einen Ende des vorliegenden

Stabes zwei benachbarte Stücke, I und II, mit der Feile heruntergeschnitten; der übrig bleibende Theil des Stabes wurde ausgeglüht und nach dem langsamen Erkalten in drei Theile, III, IV und V zerschnitten. Hierauf wurden Theil IV und V durch abermaliges Glühen und Ablöschen in Wasser von etwa 15° gehärtet, und endlich Theil I und II im rohen, Theil III im ausgeglühten, Theil IV und V im gehärteten Zustande in verdünnter Salpetersäure successive abgeätzt.

Tabelle 26. (Beobachtet.)

	Roh	Ausgeglüht	Gehärtet	Abgeätzt	Abgeätzt
Theil I	46,76 g 8,0413			20,13 g 8,0423 (±6)	
Theil II	47,43 8,0429			19,94 g 8,0454	
Theil III		28,77 g 8,0315 (±7)		14,85 g 8,0317	6,07 g 8,0340
Theil IV		36,63 g 8,0329	36,40 g 7,9850	19,88 g 7,9873 (±6)	
Theil V		36,31 g 8,0327	36,01 g 7,9841	20,95 g 7,9853	

Tabelle 26ª. (Berechnet.)

	Schicht 1	Schicht 2	Kern
Theil I roh	26,63 g 8,040 (±2)		20,13 g 8,042 (±1)
Theil II roh	27,49 g 8,041 (±2)		19,94 g 8,045 (±1)
Theil III ausgeglüht	13,92 g 8,031 (±2)	8,78 g 8,030 (±2)	6,07 g 8,034 (±1)
Theil IV gehärtet	16,52 g 7,982 (±2)		19,88 g 7,987 (±1)
Theil V gehärtet	15,06 g 7,982 (±2)		20,95 g 7,985 (±1)

Walzstahl Nr. 2. Wolframstahl von quadratischem Querschnitt. Die Dicke des Stabes betrug 11 mm, die Länge des untersuchten Stückes ca. 270 mm.

Es wurden wiederum von dem einen Ende des Stabes zunächst zwei benachbarte Stücke, I und II, heruntergeschnitten

und ihre Dichte im rohen Zustande bestimmt. Der übrige Theil des Stabes wurde ausgeglüht, in drei Theile: III, IV und V zerschnitten und diese dann gehärtet. Theil I wurde im im rohen, Theil IV und V im gehärteten Zustande successive abgeätzt, Theil II später gleichfalls ausgeglüht, gehärtet und abermals ausgeglüht.

Theil IV hatte beim Härten einige Risse bekommen; um hieraus resultirende Fehler zu vermeiden, wurden vor der Wägung in Luft etwaige Feuchtigkeitsspuren durch Erwärmen aus diesen Rissen vertrieben, vor der Wägung in Wasser dagegen das Stück unter der Luftpumpe mit Wasser gesättigt.

Tabelle 27. (Beobachtet.)

	Roh	Ausgeglüht	Gehärtet	Abgeätzt	Abgeätzt	Abgeätzt	Bemerkungen
Theil I	43,99 g 8,0375			37,19 g 8,0375	28,06 g 8,0378	17,81 g 8,0363	Die Fehler mögen hier, da die Bestimmungen meist nur einmal ausgeführt wurden, bei den kleineren Stücken bis zu 1 oder 2 Einheiten der 3. Decimale hinaufreichen. Wo mehrere Bestimmungen vorliegen, sind die mittleren Fehler den Resultaten beigefügt, und zwar in Einheiten der letzten Decimale.
Theil II	45,87 g 8,0366	45,46 g 8,0346 43,58 g 8,0335	44,19 g 7,9914				
Theil III		43,44 g 8,0385	41,77 g 7,9990				
Theil IV		44,26 g 8,0385	44,04 g 7,9894	32,36 g 7,9902	19,90 g 7,9908		
Theil V		48,37 g 8,0373	47,84 g 7,9984 (±6)	37,40 g 7,9970 (±3)	27,51 g 7,9983 (±4)	17,33 g 7,9975 (±6)	

Tabelle 27[a]. (Berechnet.)

	Schicht 1	Schicht 2	Schicht 3	Kern	Bemerkungen
Theil I roh	6,80 g 8,037(±12)	9,13 g 8,036(±8)	10,25 g 8,040(±5)	17,81 g 8,036(±1)	Bei der Fehlerberechnung ist ein Fehler der ursprünglichen Bestimmungen von 1 Einheit der 3. Decimale zu Grunde gelegt.
Theil IV gehärtet	11,68 g 7,987(±7)	12,46 g 7,989(±5)		19,90 g 7,991(±1)	
Theil V gehärtet	10,44 g 7,987(±8)	9,89 g 7,994(±7)	10,18 g 8,000(±5)	17,33 g 7,997(±1)	

Die geringe Dichteänderung, die der vorliegende Stahlstab durch das Ausglühen erfahren hat, lässt vermuthen, dass das

Material, so wie es aus der Fabrik bezogen wurde, nach dem Walzen bereits ausgeglüht worden war. Hierfür spricht auch die relativ geringe Härte, die das vorliegende Stück im ursprünglichen Zustande zeigte.

Walzstahl Nr. 3. Bandförmiger Wolframstahl von 18,5 mm Breite und 3 mm Dicke. Die Länge des untersuchten Stückes betrug ca. 300 mm.

Das ganze Stück wurde zunächst in vier Theile von etwa 75 mm Länge zerschnitten und deren specifische Gewichte im rohen Zustande bestimmt. Theil I und II wurden dann gehärtet (durch Ablöschen in Wasser von etwa 20°), Theil III ausgeglüht und langsam erkalten lassen, Theil IV im rohen Zustande belassen. Sämmtliche vier Theilstücke wurden dann successive abgeätzt, doch zeigten sich hierbei bei Theil II so viele von der Härtung herrührende Risse, dass dieses Stück von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen wurde.

Tabelle 28. (Beobachtet.)

	Roh	Ausgeglüht	Gehärtet	Abgeätzt	Abgeätzt	Abgeätzt	Bemerkungen
Theil I	34,00 g 7,9220		33,34 g 7,8478(±9)	28,15 g 7,8489(±18)	15,21 g 7,8558		Die Fehler in den Dichtebestimmungen sind hier wegen der grossen Oberfläche der Untersuchungskörper grösser als anderwärts; sie mögen im Durchschnitt 1 Einheit der 3. Decimale betragen.
Theil II	33,72 g 7,9217		32,11 g 7,8422(±2)				
Theil III	34,32 g 7,9234	33,12 g 7,9179(±3)		28,89 g 7,9162(±7)	25,21 g 7,9172(±12)	18,68 g 7,9154	
Theil IV	31,32 g 7,9215(±8)			24,84 g 7,9215(±15)	17,68 g 7,9252		

Tabelle 28ª. (Berechnet.)

	Schicht 1	Schicht 2	Schicht 3	Kern	Bemerkung
Theil I gehärtet	5,19 g 7,842(±12)	12,94 g 7,841(±4)		15,21 g 7,856(±1)	Bei der Fehlerberechnung wurde ein Fehler der ursprünglichen Bestimmungen von 1 Einheit der dritten Decimale zu Grunde gelegt.
Theil III ausgeglüht	4,23 g 7,930(±14)	3,68 g 7,910(±15)	6,53 g 7,922(±7)	18,68 g 7,915(±1)	
Theil IV roh	6,48 g 7,921(±9)	7,16 g 7,912(±7)		17,68 g 7,925(±1)	

4. Resultate.

Die Tabellen des vorigen Abschnittes liefern zunächst das Ergebniss, dass von den sämmtlichen untersuchten Körpern kein einziger völlig homogen war; es zeigen sich vielmehr in allen Untersuchungskörpern Dichteunterschiede, die die Grenzen der Beobachtungsfehler mehr oder weniger übersteigen. Dagegen zeigen sich diese Dichteunterschiede bei den verschiedenen Körpern sowohl quantitativ wie qualitativ wesentlich verschieden.

Was zunächst die Qualität anbetrifft, so ergeben die vorhergehenden Tabellen Dichteschwankungen von zweierlei Charakter:

1) Unregelmässige Schwankungen, die bei allen untersuchten Körpern auftreten, wenn auch ihr Betrag oft nur wenig über die Grenzen der Beobachtungsfehler hinausgeht.

2) Dichteschwankungen von bestimmter, räumlicher Gesetzmässigkeit, die zwar nur bei einem Theile der untersuchten Körper mit Sicherheit nachgewiesen werden konnten, deren Betrag dann aber die Beträge der unregelmässigen Schwankungen meist erheblich übersteigt.

Ihrer Quantität, also ihrem Betrage nach zeigen sich die beobachteten Dichteschwankungen bei den Untersuchungskörpern je nach dem Materiale derselben ausserordentlich verschieden. Wir wollen deshalb die untersuchten Materialien in der Reihenfolge, wie sie in den vorhergehenden Tabellen vertreten sind, in Kürze besprechen.

Die Beträge der Dichteschwankungen sind im Folgenden immer in Procenten oder Promilles der mittleren Dichte des ganzen Körpers angegeben.

Weitaus die bedeutendsten Dichteschwankungen zeigt das erste der untersuchten Materialien, das Messing. Allerdings wird man a priori von einer Legirung geringere Homogenität erwarten als von einem einfachen Körper, da bei ersterer Mischungsverschiedenheiten mit ins Spiel kommen, die bei letzterem fehlen; aber so bedeutende Dichteschwankungen, wie meine Beobachtungen speziell für Messingguss ergeben haben, dürften im allgemeinen doch nicht vorausgesetzt werden.

Zunächst treten bei den untersuchten Messingkörpern ziemlich beträchtliche unregelmässige Dichteschwankungen zu Tage, die möglicherweise auf Verschiedenheiten im Mischungsverhältniss der Grundbestandtheile Kupfer und Zink zurückzuführen sind. Solche unregelmässige Dichteschwankungen zeigt z. B. Tab. 1, wo die drei Theile des Untersuchungskörpers ihrer Lage nach völlig gleichberechtigt sind; der Betrag der Schwankungen steigt hier bis 3,5 Promille. Hierher gehören überhaupt alle Dichteunterschiede zwischen ihrer Lage nach gleichwerthigen Theilen desselben Körpers, wie die zusammengehörigen Randtheile der Tab. 3 und die verschiedenen Sectoren einzelner Scheiben der Tabellen 6 und 7. Die Dichteschwankungen betragen in den letztangeführten Fällen bez. 3,5 bis 7,5 Promille. Endlich müssen wir auch die Dichteschwankungen in den Längsrichtungen der untersuchten Cylinder, Tab. 3, 6 und 7, zu den unregelmässigen Schwankungen zählen, da sie eine feste Gesetzmässigkeit nicht erkennen lassen; ihr Betrag steigt hier bis zu 9 Promille (Tab. 6).

Ausserdem zeigen aber die sämmtlichen gegossenen Messingkörper, bei denen nach Art ihrer Zerlegung diese Erscheinung zu Tage treten kann, eine beträchtliche Abnahme der Dichte in der Richtung von aussen nach innen, und zwar geht diese gesetzmässige Dichteänderung ihrem Betrage nach weit über die unregelmässigen Schwankungen hinaus. So beträgt der grösste Dichteunterschied zwischen den peripherischen und den centralen Theilen der einzelnen Scheiben in Tab. 3 und 4 etwa 4,5 Proc., in Tab. 6 4 Proc., in Tab. 7 sogar 6,8 Proc.! Gegenüber dieser beträchtlichen Dichteänderung im Querschnitt fallen die unregelmässigen Schwankungen in der Längsrichtung kaum ins Gewicht, sodass, wenn wir die beiden Aenderungen combiniren und nach dem Maximalbetrage der Schwankungen innerhalb der ganzen Körper fragen, wir auch keine wesentlich höheren Zahlen bekommen.

Die Dichteabnahme in der Richtung von aussen nach innen zeigt noch die weitere Eigenthümlichkeit, dass sie mit wachsender Entfernung vom Rande immer geringer wird, sodass also die untersuchten Körper in ihren centralen Partien sich homogener zeigen als in ihren peripherischen Theilen.

Trägt man die Dichten der einzelnen concentrischen Schichten einer Scheibe als Funktionen des Radius auf, so wendet die erhaltene Curve immer ihre convexe Seite der Abscissenaxe zu. Oder trägt man in irgend einen Querschnitt der untersuchten Cylinder die Curven gleicher Dichtigkeit ein, derart dass die Dichte von einer Curve bis zur anderen immer um den gleichen Betrag sich ändert, so erhält man ein System concentrisch um einander gelagerter Curven, die sich nach aussen zu immer dichter aneinander schaaren.

Diesem Umstande, dass die Dichteänderungen nach innen zu immer kleiner werden, ist es auch zuzuschreiben, dass die Werthe der Tab. 5 verhältnissmässig geringe, nur wenig über 1 Proc. hinausgehende Unterschiede zeigen, da der betreffende Ring ursprünglich viel stärker gegossen und vor der Untersuchung erst auf die angegebenen Dimensionen abgedreht worden war.

Berücksichtigen wir, dass beim Gusse eines Körpers immer die Oberflächentheile eher erstarren werden als die inneren Partien, so können wir das Gesetz der Dichteabnahme von aussen nach innen auch so aussprechen: dass bei gegossenen Messingkörpern immer diejenigen Theile die grössere Dichte zeigen, die nach dem Giessen zuerst erstarrt sind. — Diese Formulirung führt auch zu einer physikalischen Erklärung der genannten Erscheinung, auf welche wir später zu sprechen kommen werden.

Wenden wir uns nun zu dem mechanisch verarbeiteten Messing, wie es in Form von Drähten und Blechen in Untersuchung gezogen wurde, so zeigen sich bei diesem die Dichteschwankungen innerhalb der einzelnen Körper weit geringer als beim Messingguss; es sind also offenbar die in den ursprünglichen gegossenen Cylindern oder Barren vorhanden gewesenen Unterschiede durch die mechanische Bearbeitung zum grossen Theil ausgeglichen worden.

An dem starken Messingdrahte, Tab. 8 und 9, beobachten wir zunächst wieder die Dichteabnahme in der Richtung von aussen nach innen, deren Grösse in Tab. 8, bis zu beinahe 1 Proc., in Tab. 9 bis zu 0,75 Proc. hinaufgeht. Dagegen zeigen sich die Beträge der Dichteänderungen hier nicht mehr

nach innen zu immer kleiner werdend; im Gegentheil fallen bei den untersuchten Stücken die grössten Schwankungen in die centralen Theile, während die peripherischen Theile sich homogener zeigen. Es lässt dies darauf schliessen, dass die ausgleichende Wirkung des Drahtzugs vorzugsweise in den peripherischen Theilen zur Geltung kommt. Die Dichteschwankungen in der Längsrichtung des Drahtes sind sehr gering; sie steigen bei den untersuchten Stücken nur bis etwa 1 Promille, und zwar scheint eine gleichmässige Dichtezunahme nach der einen Richtung hin vorzuliegen; doch kann dies nicht mit Bestimmtheit behauptet werden, da die Reihenfolge der Scheiben I bis V in dem ursprünglichen Stücke nicht genau beobachtet wurde.

Der dünnere Messingdraht, Tab. 10, zeigt sowohl in der Längsrichtung wie im Querschnitt Dichteschwankungen, die durchweg unter dem Betrage von $^1/_2$ Promille bleiben: dieser Draht kann also für alle Zwecke praktischer Verwendung als vollkommen homogen betrachtet werden.

Was endlich das Messingblech anbetrifft, so haben wir bei diesem drei wesentlich verschiedene Richtungen zu unterscheiden: einmal in der Oberfläche die Walzrichtung und die zu ihr senkrechte Richtung, die ich als die Querrichtung, endlich die Richtung senkrecht zu den Walzflächen, die ich als die Dickenrichtung bezeichnen will. Von den drei untersuchten Blechstücken war an dem ersten, Tab. 11, die Walzrichtung nicht mehr mit Sicherheit erkennbar, doch lässt sich aus der Analogie mit den übrigen Fällen schliessen, dass sie den kurzen Kanten parallel lief. Dies angenommen, haben wir das Resultat, dass die sämmtlichen untersuchten Stücke in der Walzrichtung sich vollkommen homogen zeigten. In der Querrichtung zeigt das eine Stück (Ulmer Blech) eine stetige Abnahme nach der einen Seite hin, die bis zu einem Betrage von 9 Prom. steigt; das zweite Stück erweist sich auch in dieser Richtung innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler als völlig homogen; das dritte Stück dagegen zeigt wieder eine deutlich nachweisbare Aenderung, die jedoch nur einen Betrag von 0,4 Prom. erreicht. In der Dickenrichtung endlich zeigt das erste Stück sowohl an dem abgeätzten wie an dem abgefeilten Theilstücke eine Dichteabnahme in der Richtung von

aussen nach innen bis zu einem Betrage von 8 Prom.; das zweite Stück zeigt im Gegensatz eine geringe Dichtezunahme nach innen zu, die aber nur den Betrag von etwa 1 Prom. erreicht und vielleicht auf Rechnung der mechanischen Einwirkungen des Abfeilens zu setzen ist; das dritte Stück erweist sich in der Dickenrichtung als vollkommen homogen.

Das zweite der untersuchten Materialien, gegossenes Zink, zeigt überhaupt keine gesetzmässigen Dichteänderungen. Der grösste Betrag der unregelmässigen Schwankungen beläuft sich bei dem ersten Körper, Tab. 14, in den beobachteten Werthen auf 0,4 Prom., in den berechneten Werthen auf 3,6 Prom., welch' letztere Zahl jedoch mit einem Fehler von 2,5 Prom. behaftet sein kann. Bei dem zweiten Untersuchungskörper, Tab. 15, bleiben die Schwankungen sowohl in den beobachteten wie in den berechneten Werthen durchweg unter dem Betrage von $^1/_2$ Promille; dieser Körper kann also wieder praktisch als vollkommen homogen betrachtet werden.

Wenden wir uns drittens zum Kupfer, so treten uns bei diesem wieder etwas grössere Dichteschwankungen entgegen; doch ist es schwer, hier sichere Schlüsse über eine bestimmte Gesetzmässigkeit der Dichtevertheilung zu gewinnen. Die Gussstücke Nr. 2 und 3 (Tab. 17 und 18) zeigen sehr beträchtliche, bei ersterem bis zu 0,8 Procent, bei letzterem bis zu 1,7 Proc. hinaufgehende und dabei ziemlich unregelmässige Dichteschwankungen; doch ist hier sowohl die Grösse der Schwankungen wie auch die Unregelmässigkeit der Vertheilung auf die Porosität des Materials zurückzuführen, weshalb diese beiden Körper für die Aufstellung bestimmter Gesetze nicht in Betracht kommen können. Die beiden Gusscylinder Nr. 1 und 5 (Tab. 16 und 20) zeigen übereinstimmend in ihrer Längsrichtung eine merkliche Zunahme der Dichte von der Mitte nach den beiden Enden zu (bei dem Cylinder Nr. 5 zeigt allerdings der unterste Theil wieder eine geringere Dichte, doch ist dies auf Rechnung der Verunreinigung seiner Oberflächenschichten durch Formsand zu setzen). Man würde hieraus wiederum auf eine Dichteverminderung in der Richtung von aussen nach innen schliessen können, und es würde dann die

gleiche Erscheinung auch innerhalb der einzelnen Querschnitte der verschiedenen Cylinder zu erwarten sein. Indessen zeigen die Tabellen 16, 19 und 20, dass dies nicht übereinstimmend der Fall ist; vielmehr zeigen sich die Dichteschwankungen innerhalb der einzelnen Querschnitte ziemlich verschieden und lassen keine bestimmte Gesetzmässigkeit erkennen. Bei dem aus electrolytischem Kupfer gegossenen Cylinder Nr. 5 (Tab. 20) zeigt sich insbesondere die auffällige Erscheinung, dass die abgedrehten Theile eine geringe Dichtezunahme, die abgeätzten Theile eine deutliche Dichteabnahme von aussen nach innen aufweisen, sodass es nicht ausgeschlossen erscheint, dass bei diesem weichen, ductilen Materiale die mechanische Einwirkung des Abdrehens eine merkliche Vergrösserung der Dichte der rückbleibenden Theile verursacht haben könnte. Dies angenommen, würden allerdings die Tabellen 16, 19 und 20 im wesentlichen eine Dichteabnahme von aussen nach innen ergeben, die jedoch zum Theil erst von der zweiten Schicht ab zu Tage tritt und auch sonst viele Unregelmässigkeiten zeigt.

Was den Betrag der Dichteschwankungen anbetrifft, so steigt dieser bei Cylinder Nr. 1 in der Längsrichtung bis auf 0,6 Prom., innerhalb der einzelnen Scheiben auf 1,8 Promille (Sector III^c ist dabei nicht berücksichtigt, da er eine undichte Stelle besass), innerhalb des ganzen Cylinders auf 2 Prom. Bei Gussstück Nr. 4 beträgt die Dichteschwankung in der Längsrichtung 0,6 Prom., innerhalb jedes der beiden Theile im Maximum 2,1 Prom., innerhalb des ganzen Cylinders im Maximum 2,7 Prom. Bei dem Gusscylinder Nr. 5 endlich steigen die Dichteänderungen in der Längsrichtung bis zum Betrage von 3,2 Prom., innerhalb der einzelnen Theilstücke sowohl wie innerhalb des ganzen Cylinders gleichfalls auf 3,2 Prom. (Schicht 1 des Theiles I nicht mit berücksichtigt). Bei den Gussstücken Nr. 2 und 3 sind die Dichteschwankungen, wie schon früher bemerkt, erheblich grösser wegen der Porosität dieser Stücke.

Der untersuchte Kupferdraht erweist sich in der Längsrichtung innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler als vollkommen homogen; in der Querrichtung zeigt sich zunächst von Schicht 1 nach Schicht 2 bei allen untersuchten Theil-

stücken eine übereinstimmende Dichtezunahme im Betrage von 1,4 Promille; von da ab bleibt der Draht nach innen zu gleichfalls völlig homogen. Die geringere Dichte der äussersten Schicht ist schwer zu erklären.

Das untersuchte Stück Kupferblech lässt ebenfalls keine Gesetzmässigkeit der Dichtevertheilung erkennen. Es zeigen sich in der Längs- und Querrichtung unregelmässige Schwankungen, die aber nur bis zu einem Betrage von 0,3 Promille hinaufreichen. In der Dickenrichtung ergiebt das abgeätzte Theilstück eine Dichtezunahme von aussen nach innen bis zum Betrage von 1 Prom.; das abgefeilte Stück zeigt im wesentlichen eine Dichtezunahme von der einen nach der anderen Walzfläche hin, die im Maximum 1,7 Promille ausmacht.

Interessantere Ergebnisse liefert wieder das vierte der untersuchten Materialien, das Eisen, da bei diesem die Dichteänderungen wieder eine grössere Regelmässigkeit zeigen. Bei Gussstück Nr. 1 (Tab. 23), das fertig aus dem Vorrathe der Fabrik bezogen wurde, war zwar die Lage des Körpers beim Giessen nicht mehr mit Sicherheit festzustellen, indessen liess sich nach dem Aussehen der Oberfläche vermuthen, dass die Axe des Cylinders vertical stand, und dass Schicht a die oberste war. Unter dieser Annahme zeigt das genannte Gussstück in voller Uebereinstimmung mit den Gussstücken Nr. 2 und 3 eine beträchtliche stetige Dichteabnahme in der Richtung von unten nach oben. Der Dichteunterschied zwischen den oberen und unteren Schichten beträgt bei dem ersten Körper, wenn wir die Mittel aus den Theilen I und II nehmen, etwa 7 Prom., bei dem zweiten Körper, wenn wir gleichfalls die Halbringe II^a und II^b zum Mittel combiniren, etwa 2,5 Prom.; doch würden sich im letzteren Falle wohl auch grössere Unterschiede ergeben haben, wenn der Körper in mehrere parallele Schichten zerlegt worden wäre. Bei dem Gusscylinder Nr. 3, der in horizontaler Lage gegossen worden war, wurde nur eine einzige Scheibe durch einen Horizontalschnitt in eine obere und eine untere Hälfte zerlegt; der Dichteunterschied beträgt hier etwa 1 Promille.

Ausser dieser Dichteabnahme von unten nach oben zeigt sich, wenn auch nicht so regelmässig, innerhalb der einzelnen

Querschnitte eine Dichteabnahme von aussen nach innen. So beträgt bei Gussstück Nr. 1 der Dichteunterschied zwischen den peripherischen und den centralen Theilen bis zu 4 Prom., und zwar zeigt sich der Betrag der Dichteänderung nach der Mitte zu grösser werdend. Bei Gussstück Nr. 2, einem Hohlcylinder, geht die Dichteabnahme im Querschnitt nicht von den Rändern nach der Mitte, sondern von der äusseren nach der inneren Peripherie, sodass sie bei dem abgeätzten Theile nur wenig zur Geltung kommt, während sie bei dem abgedrehten Theile einen Betrag von etwa 9 Prom. erreicht. Bei dem Cylinder Nr. 3 zeigen die im Ganzen abgedrehten Theilstücke II und III zwar auch im Kern geringere Dichte als in der äussersten Schicht, jedoch zeigt das axial durchschnittene und in zwei Hälften abgeätzte Theilstück I deutlich, dass die Dichteabnahme innerhalb des Querschnitts im wesentlichen nicht in der Richtung von aussen nach innen, sondern in der Richtung von unten nach oben vor sich ging. Die Dichteabnahme von aussen nach innen macht sich hier vielmehr in der Längsrichtung des Cylinders geltend, dessen Dichte von der Mitte nach den beiden Enden zu sehr gleichmässig um den Betrag von etwa 1 Promille wächst.

Die im Gusseisen beobachtete Dichtevertheilung: — deutliche Dichteabnahme in der Richtung von unten nach oben, weniger deutliche in der Richtung von aussen nach innen — dürfte sich vielleicht gleichfalls in den Satz zusammenfassen lassen, dass diejenigen Theile die grössere Dichte zeigen, die beim Giessen zuerst erstarrt sind, indem man dann allerdings annehmen müsste, dass das nur wenig über seinen Schmelzpunkt erhitzte flüssige Eisen durch die Berührung mit der kalten Form so rasch abgekühlt wurde, dass die Erstarrung zum Theil noch während des Giessens, deshalb vornehmlich in der Richtung von unten nach oben vor sich ging. Indessen scheint es mir doch geboten, das immerhin sehr merkwürdige Resultat der stetigen Dichteabnahme von unten nach oben noch an einem Untersuchungskörper von grösserer Höhe, etwa einem vertical gegossenen Cylinder zu prüfen, und möchte ich mir diese Untersuchung noch als Ergänzung der vorliegenden Arbeit vorbehalten.

Bezüglich des letzten Untersuchungsobjectes, des Stahls, über den ich leider bisher nur wenige und wegen der Gleichartigkeit des verwendeten Materials ziemlich einseitige Versuche anstellen konnte, ergeben die Tabellen 26 bis 28 die folgenden Resultate. Was zunächst die Dichtevertheilung im rohen und ausgeglühten Stahle anbetrifft, so zeigen sich die untersuchten Stücke, die eine energische mechanische Bearbeitung erfahren hatten, sowohl in der Längsrichtung wie im Querschnitt im hohen Grade homogen; die beobachteten Dichteschwankungen übersteigen kaum die Grenzen der Beobachtungsfehler. Eine bestimmte Gesetzmässigkeit der Dichtevertheilung lässt sich nicht constatiren. Bei dem ersten, drahtförmigen Untersuchungsstücke zeigen zwar die Theile I, II und III übereinstimmend eine Dichtezunahme von aussen nach innen; das zweite, prismatische, und das dritte, bandförmige Untersuchungsstück ergeben jedoch in den rohen Theilen ganz unregelmässige Schwankungen, das letztere in dem ausgeglühten Theilstück III eine unstetige Dichteabnahme nach innen zu. Der Betrag der Dichteschwankungen bleibt in der Längsrichtung durchweg kleiner als 0,25 Prom.; im Querschnitt steigt er bei den Untersuchungskörpern Nr. 1 und 2 auf 0,5 Prom., bei dem dritten Körper auf 2,5 Prom. (Tab. 28[a], Theil III); doch dürfte letzterer Werth wegen der hier ziemlich bedeutenden Beobachtungsfehler zu gross erscheinen.

Durch das Ausglühen hat sich bei Walzstahl Nr. 1 und 3 eine merkliche Dichteverminderung ergeben, die im ersteren Falle 1,2 Prom., im letzteren 0,7 Prom. beträgt. Walzstahl Nr. 2, der wahrscheinlich bereits ausgeglüht war, erfuhr durch einmaliges Ausglühen (Theil III bis V) keine merkliche Dichteänderung, durch mehrmaliges Glühen (Theil III) nur eine sehr geringe Verminderung der Dichte.

Was endlich den Einfluss der Härtung anbetrifft, so zeigt sich bei allen untersuchten Stücken die bekannte, wenn auch nicht für alle Stahlsorten zutreffende Erscheinung einer beträchtlichen Verminderung der Dichte durch die Härtung. Die Grösse der Dichteverminderung beim Uebergang aus dem ausgeglühten in den gehärteten Zustand beträgt für Walzstahl Nr. 1 und 2 5—6 Prom., für den bandförmigen Walzstahl Nr. 3

9—10 Promille. Dagegen zeigt sich trotz dieser bedeutenden Aenderung der mittleren Dichte die Dichtevertheilung in den gehärteten Stahlstücken im Vergleich mit den rohen und ausgeglühten Stücken nicht wesentlich geändert. So zeigt Tab. 26 für die gehärteten Stahlstücke genau dieselbe geringe Dichtezunahme nach innen zu wie für die rohen und geglühten. Tab. 27 giebt für die gehärteten Theilstücke IV und V, Tab. 28 für das gehärtete Theilstück I gleichfalls eine Dichtezunahme von aussen nach innen, deren Beträge sich bezüglich auf 0,5, 1,6 und 1,9 Prom. belaufen, welche Werthe von den Beträgen der Schwankungen in den benachbarten rohen und ausgeglühten Theilstücken nur innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler differiren. Eine Dichteabnahme von aussen nach innen zu ist bei keinem der untersuchten Hartstahlstücke zu Tage getreten.

Von den gewonnenen Resultaten ist das positiv am meisten hervortretende die bedeutende Dichteabnahme des gegossenen Messings in der Richtung von aussen nach innen. Dieselbe tritt an sämmtlichen Untersuchungskörpern übereinstimmend und mit solcher Regelmässigkeit zu Tage, dass eine Erklärung dieser Erscheinung aus zufälligen Mischungsverschiedenheiten ausgeschlossen bleiben muss. Auch ist es nicht denkbar, dass so bedeutende und so regelmässige Dichteänderungen lediglich der Einwirkung der mechanischen Verkleinerung zuzuschreiben sein könnten, zumal diese Verkleinerung bei Gussstück Nr. 3 in anderer Weise ausgeführt wurde als bei den übrigen Körpern. (Eine strenge Prüfung des Einflusses der mechanischen Verkleinerung durch gleichzeitige chemische Verkleinerung benachbarter Theile war hier allerdings nicht wohl ausführbar, da Messingguss von Säuren sehr ungleichmässig angegriffen wird.) Es bleibt also nur übrig, die genannte Dichteänderung auf den Einfluss bestimmter physikalischer Kräfte zurückzuführen, die bei der Herstellung aller Gussstücke in gleicher Weise zu Tage treten.

Es liegt nun auf der Hand, die Ursache dieser Kräfte in der beim Erstarren der Gussstücke auftretenden Volumen-

änderung zu suchen. Die beobachtete Dichtevertheilung würde sich dann ganz ungezwungen durch die Annahme einer Volumenverminderung beim Erstarren erklären lassen. Die Oberfläche des Körpers, welche zuerst erstarrt, leistet der Contraction der inneren Theile Widerstand und verhindert sie dadurch, sich auf diejenige Dichte zusammenzuziehen, welche jedes Theilchen im freien Zustande nach dem Erstarren besitzen würde. Vorausgesetzt muss aber dabei werden, dass die Zähigkeit der erstarrenden Masse genügend gross ist, um einer Trennung der einzelnen Theile durch die Contractionskräfte zu widerstehen, da sich sonst im Inneren Hohlräume bilden, die Massentheilchen sich aber auf ihre Maximaldichte zusammenziehen würden. Solche Hohlräume können dann sowohl als kleine Poren durch die ganze Masse vertheilt sein, als auch einzelne grössere Löcher bilden; den letzteren Fall beobachtete ich bei Zinkguss Nr. 2, wo die Höhlung sich nach der oberen Cylinderfläche zu öffnete, und bei Kupferguss Nr. 5, wo sich ein ganz von Masse umschlossener Hohlraum ebenfalls im oberen Theile des Cylinders vorfand. — Es ist demnach sehr wohl möglich, dass verschiedene Materialien auch bei ähnlichen Contractionsverhältnissen verschiedene Dichtevertheilung besitzen, je nach der Zähigkeit der erstarrenden Masse; trennen sich die Theilchen leicht voneinander, so bilden sich Hohlräume, die eigentlichen Massentheile erhalten aber annähernd gleiche Dichte; leistet die Cohäsion der Theilchen der Trennung Widerstand, so finden die inneren Theilchen in grösseren Molecularabständen eine neue Gleichgewichtslage, besitzen dann also eine geringere Dichte als die äusseren Schichten des Körpers.

Der Annahme einer Volumenverminderung beim Erstarren steht allerdings die Ansicht der Herren Nies und Winkelmann[1]) entgegen, die durch eine Reihe sorgfältig ausgeführter Versuche im Gegentheil eine Volumenvermehrung beim Erstarren für eine Anzahl von Metallen (darunter Zink, Kupfer und Eisen) nachgewiesen und damit auch für die übrigen Me-

1) Nies u. Winkelmann, Wied. Ann. **13.** p. 43. 1881; **18.** p. 364. 1883.

talle und Metalllegirungen wahrscheinlich gemacht zu haben glauben. Die Untersuchungsmethode der genannten Herren war die, dass sie in geschmolzenes Metall Stücke des gleichen Metalls im festen Zustande eintauchten, die dann nach erfolgtem Temperaturaustausch regelmässig wieder an die Oberfläche aufstiegen, sodass hieraus auf eine grössere Dichte des flüssigen gegenüber dem gleich temperirten festen Metalle geschlossen werden konnte. Indessen haben spätere dilatometrische Messungen von E. Wiedemann[1]) für eines der von den Herren Nies und Winkelmann untersuchten Metalle, das Zinn, genau das entgegengesetzte Verhalten, nämlich eine Ausdehnung beim Schmelzen im Betrage von etwa 2 Proc. ergeben, ebenso eine starke Ausdehnung für die als Schnellloth bekannte Blei-Zinnlegirung. Wiedemann sucht deshalb das Aufsteigen der festen Stücke in dem geschmolzenen Metall auf die Wirkung von Convectionsströmen zurückzuführen, die durch die Abkühlung der geschmolzenen Masse an den Wandungen des Gefässes erzeugt würden; — in der That dürfte seine dilatometrische Methode, die zugleich eine genaue Messung gestattet, bei weitem weniger der Gefahr unbekannter störender Einflüsse ausgesetzt sein als die Nies-Winkelmann'schen Versuche. Acceptirt man aber das Wiedemann'sche Resultat für Zinn, so sind die Beobachtungen der oben genannten Herren auch für die übrigen Metalle sehr zweifelhaft geworden, und es dürfte deshalb wohl statthaft sein, bis zur endgültigen Entscheidung der Frage der Volumenänderung beim Schmelzen und Erstarren die ungezwungene Erklärung der beobachteten Dichtevertheilung in Messing aus einer Contraction beim Erstarren einstweilen bestehen zu lassen.

Die Erklärung der gefundenen Dichtevertheilung aus der Volumenänderung beim Erstarren führt zunächst auf die Vermuthung, dass sich geringere Dichteschwankungen ergeben würden, wenn durch besondere Vorsichtsmaassregeln der Erkaltungsprocess zu einem für alle Körpertheile möglichst gleichmässigen gestaltet würde, sodass während der Dauer der Abkühlung möglichst geringe Temperaturunterschiede innerhalb

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **20.** p. 228. 1883.

des Körpers vorkämen. Von dieser Muthmassung ausgehend, liess ich mir von den Herren Pirner und Franz in Dresden die Messingcylinder Nr. 5 und 6 aus dem gleichen Tiegel, den einen aber in kalte, den anderen in rothglühende Form giessen und letzteren sehr langsam abkühlen. Das Resultat entsprach aber, wie aus den Tabellen 6 und 7 hervorgeht, keineswegs der Erwartung; vielmehr zeigte der in glühende Form gegossene Cylinder eine noch beträchtlichere Dichteabnahme nach innen zu als der in kalte Form gegossene. Indessen enthält dieses Ergebniss keinen Widerspruch gegen die oben aufgestellte Erklärung der Dichtevertheilung. Denn offenbar können nach dieser Erklärung die Dichteunterschiede nur dann zum Verschwinden gebracht werden, wenn alle Theilchen gleichzeitig erstarren; bei ungleichzeitiger Erstarrung werden aber immer die später erstarrenden Theilchen von den schon erstarrten aus eine Spannung erleiden, die ihrer eigenen Contraction entgegenwirkt, und ob diese Spannung auf das Theilchen schon bei höherer oder erst bei niederer Temperatur einwirkt, wird keinen grossen Unterschied ausmachen, falls nur die Erstarrung selbst nicht mehr mit einer Temperaturerniedrigung verbunden ist. Ein gleichzeitiges Erstarren aller Theile wurde aber durch das Giessen in glühende Form keineswegs erreicht, zumal die Temperatur dieser Form jedenfalls noch wesentlich unter der Schmelztemperatur des Messings lag.

Wenn Zink und Kupfer gar keine oder doch nur eine geringe und unregelmässige Dichteabnahme von aussen nach innen zeigen, so kann dies nach dem früher Bemerkten entweder darin begründet sein, dass diese Metalle beim Erstarren nur eine geringe Contraction erfahren, oder darin, dass die Cohäsionskräfte zwischen den erstarrenden Theilchen zu klein sind, um der durch die Contraction entstehenden Spannung Widerstand leisten zu können. Aus dem schon erwähnten Vorhandensein grösserer Hohlräume in einigen gegossenen Zink- und Kupfercylindern möchte ich auf letztere Ursache als die wesentlichere schliessen. Schwieriger ist es dagegen, die beim Eisen beobachtete Dichteabnahme in der Richtung von unten nach oben aus der Volumenänderung beim Erstarren zu erklären, da diese anscheinend nur dann, wenn ein noch flüssiger Kern von einer

bereits fest gewordenen Hülle umgeben ist, eine Dichteänderung, und zwar in der Richtung von aussen nach innen bewirken kann. Ebenso dürfte es kaum thunlich sein, die Dichtezunahme nach unten zu auf eine Compression der erstarrenden Theile durch den Eigendruck des Körpers zurückzuführen, da dieser Druck bei der geringen Höhe der Untersuchungskörper noch nicht einmal auf ein Zehntel einer Atmosphäre hinaufsteigt. Selbst wenn man annehmen wollte, dass Eisen in dem Uebergangsstadium vom flüssigen zum festen Aggregatzustande, dem plastischen Zustande, einen hohen Grad von Compressibilität besässe, bliebe es doch von vornherein unwahrscheinlich, dass so geringe Druckdifferenzen so beträchtliche Dichteunterschiede hervorbringen sollten. Es scheint deshalb geboten, erst nochmals die beobachtete Dichtevertheilung an anderen Untersuchungskörpern von grösserer Höhe zu prüfen, ehe man sich eine bestimmte Ansicht über den Grund dieser Erscheinung bildet.

Ein zweites bemerkenswerthes Resultat der vorliegenden Untersuchungen, wenn auch mehr negativen Charakters, ist die Beobachtung, dass die gehärteten Stahlstücke keine wesentlich andere Dichtevertheilung zeigten als die ungehärteten Theilstücke derselben Körper. Es steht dies im Widerspruch zu der noch vielfach verbreiteten und von namhaften Physikern, wie Mousson, vertretenen Ansicht, dass gehärteter Stahl in der Richtung von aussen nach innen eine wesentliche Abnahme sowohl der Dichte als auch der Härte aufweisen müsse. Man hat sich diese Ansicht aus einer rein mechanischen Erklärung der Härtung heraus gebildet, welche annimmt, der glühende, weiche Stahl werde durch die intensive Abkühlung des Ablöschens in seiner Oberfläche momentan zum Erstarren gebracht, sodass der innere Kern sich nicht mehr nach Maassgabe der Temperaturerniedrigung zusammenziehen könne, demzufolge eine ungeheuere Spannung auf die Oberfläche ausübe und diese dadurch ausserordentlich hart und dicht mache, während der innere Kern selbst weich und von geringerer Dichte bliebe. Diese Ansicht wird gestützt durch die Wahrnehmung, dass im allgemeinen die mittlere Dichte des Stahls durch die Härtung eine beträchtliche Verminderung erleidet. Indessen haben ein-

zelne Beobachtungen[1]) die Thatsache ergeben, dass auch Stahlsorten existiren, die durch die Härtung im Gegentheil eine Dichtezunahme erfahren. Weiter bleibt es nach der obigen Anschauung vom Wesen der Härtung unerklärt, warum andere Metalle, bei denen die mechanischen Einflüsse des Ablöschens ganz in gleicher Weise zur Geltung kommen, keine Spur von Härtbarkeit besitzen. Es gewinnt deshalb in neuerer Zeit eine andere Ansicht Boden, welche die Härtung auf eine chemische Veränderung des Stahles zurückführt, nämlich auf eine Aenderung im Mengenverhältnisse des chemisch gebundenen zu dem frei im Stahle vorhandenen Kohlenstoffe, — welche Aenderung allerdings durch die beim Ablöschen auftretenden starken Druckkräfte unter gleichzeitiger Einwirkung der Glühhitze verursacht sein mag. Mit dieser neuen Erklärung der Härtung wird aber die Consequenz der alten, die Vorstellung einer harten und dichten Hülle und eines weichen und minder dichten Kernes hinfällig, und ebenso muss rückwärts der Nachweis einer gleichmässigen Vertheilung der Härte und Dichte die mechanische Härtungstheorie *ad absurdum* führen.

In diesem Sinne hat bereits Herr Carl Fromme[2]) Untersuchungen über die Dichtevertheilung in gehärteten Stahlstäben mit gleichzeitigen Härtebeobachtungen angestellt. Während er aber in Betreff der Härte zu dem Resultate kommt, dass dieselbe nach innen zu nicht merklich abnimmt, bestätigen ihm seine Dichtebestimmungen „in ihrer Gesammtheit die gebräuchliche Ansicht, dass sich infolge des Ablöschens eine derartige Vertheilung der Dichte einstellt, bei welcher dieselbe in der Richtung von aussen nach innen abnimmt.“ Indessen scheint mir, dass dieser Schluss, der übrigens nur aus der Untersuchung von fünf aus demselben Drahte geschnittenen Stäbchen gezogen wird, von denen vier (*a* bis *d*) im gehärteten, eines (*e*) im ausgeglühten Zustande successive abgeätzt wurden, aus den Fromme'schen Zahlen gar nicht mit Bestimmtheit gefolgert werden kann. Herr Fromme theilt nichts mit über die Zuverlässigkeit seiner Angaben; bei der Kleinheit seiner Untersuchungskörper,

1) Siehe H. Meyer, Wied. Ann. 18. p. 233. 1883; desgleichen eine ältere Angabe von Rinmann in dessen „Geschichte des Eisens“.

2) C. Fromme, Wied. Ann. 22. p. 371. 1884.

die bis zu einem Gewichte von 2,7 *g* herabgehen, wird man aber eine Unsicherheit bis zu 5 Einheiten der dritten Decimale annehmen können, die bei den Dichtebestimmungen mittelst des Pyknometers vielleicht noch grösser sein dürfte. Unter dieser Annahme bleiben die Schwankungen bei den Stäbchen *a* (und nahezu auch bei dem ungehärteten Stäbchen *e*) innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler; bei Stäbchen *b* sind sie zu unregelmässig, um auf eine Gesetzmässigkeit der Dichtevertheilung schliessen zu lassen; bleiben also nur die Stäbchen *c* und *d*, die allerdings — mit Schwankungen — eine Dichteabnahme von aussen nach innen ergeben. Aus zwei einzelnen Beobachtungsreihen aber, die mit zwei anderen, gleichberechtigten nicht im Einklange stehen, kann kein sicherer Schluss gezogen werden.

Was meine eigenen Beobachtungen anbetrifft, die allerdings sowohl in Bezug auf die Zahl und die Mannigfaltigkeit der Untersuchungsobjecte noch weitgehender Ergänzung bedürfen (anschliessende Untersuchungen über Gussstahl sollen in nächster Zeit im physikalischen Institute der Universität Würzburg zur Ausführung gebracht werden), als auch in Bezug auf die Ausführung vielleicht ein öfteres Abätzen dünnerer Schichten wünschenswerth erscheinen lassen, so ergeben dieselben keine wesentliche Aenderung der Dichtevertheilung durch die Härtung, insbesondere zeigen sie mit Sicherheit, dass eine Dichteabnahme in der Richtung von aussen nach innen in den gehärteten Stücken nicht vorhanden war. Das gleiche Verhalten konnte ich auch in Bezug auf die Härte constatiren, indem ich die abgeätzten Stücke jedesmal mit der Feile prüfte. Um dieses Resultat noch sicherer zu stellen, liess ich mir zwei gehärtete Stücke des Walzstahls Nr. 2 mit dem Schmirgeldraht quer durchschneiden und die Schnittflächen sowohl wie die Oberflächen sorgfältig poliren; es ergab sich dann beim Prüfen mit Stahlspitzen verschiedener Härtegrade an allen Stellen die gleiche Härte. Möglich bleibt es immerhin, dass bei Hartstahlkörpern von grösseren Dimensionen die mittleren Theile sich weniger hart erweisen können als die Oberfläche, doch dürfte dann diese Ungleichmässigkeit in dem ungleichmässigen Glühen des Körpers begründet sein.

Die drei nothwendigen Consequenzen der mechanischen Erklärung der Härtung: 1) Vergrösserung des Volumens, also Verminderung der mittleren Dichte, 2) Abnahme der Dichte und 3) Abnahme der Härte in der Richtung von aussen nach innen, sind also durch die hierüber angestellten Beobachtungen in der Mehrheit nicht bestätigt worden. Die erste dieser Folgerungen dürfte allerdings nur für sehr wenige Stahlsorten nicht zutreffen, dagegen scheint die zweite durch die bis jetzt vorliegenden Beobachtungen in einzelnen Fällen entschieden widerlegt und im allgemeinen wenigstens sehr zweifelhaft gemacht zu sein; ebenso hat sich die dritte Folgerung, die Abnahme der Härte von aussen nach innen, bisher nicht bestätigt. Demnach dürfte jene alte Auffassung vom Wesen der Härtung, die sich noch in vielen Lehrbüchern ausgesprochen findet, kaum mehr haltbar erscheinen, vielmehr die andere Ansicht den Vorzug verdienen, welche das massgebende Moment des Processes in einer chemischen Veränderung des Stahles, nämlich in eine vermehrten Bindung von Kohlenstoff sucht. Dass eine derartige Veränderung in der That vorliegt, ist schon durch ältere Versuche von Caron bewiesen, nach welchen Hartstahl bei der Behandlung mit Säuren einen viel geringeren Kohlerückstand zeigt als Stahl im ausgeglühten Zustande.

5. Einfluss der Dichteschwankungen auf die Berechnung von Trägheitsmomenten.

Die Kenntniss der Dichtevertheilung ist von besonderer Wichtigkeit für die genaue Berechnung des Trägheitsmomentes gegebener Körper in Bezug auf gegebene Axen. Da diese Berechnung in praxi stets unter der Voraussetzung eines homogenen Körpers ausgeführt wird, so wird der berechnete Werth wegen der thatsächlich vorhandenen Inhomogenität immer mit einem Fehler behaftet sein.

Wir wollen im Folgenden untersuchen: wie hoch sich dieser Fehler belaufen kann, wenn der Maximalbetrag der Dichteschwankungen im Körper gegeben, über die Vertheilung der Dichte aber nichts bekannt ist.

Das Trägheitsmoment eines beliebigen homogenen Körpers

von der Dichte ϱ wird in Bezug auf die z-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems durch den Ausdruck dargestellt:

$$K = \varrho \int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

wobei die Integration über den ganzen Körper zu erstrecken ist.

Soll nun die Dichte des Körpers nicht constant sein, sondern nur innerhalb gegebener Grenzen liegen, so kann man die Dichte eines beliebigen Körperelementes gleich $\varrho + \Delta\varrho$ setzen, wobei ϱ eine Constante, etwa die Dichte eines bestimmten Körpertheilchens, $\Delta\varrho$ eine unbekannte Funktion der Coordinaten darstellt, von der nur bekannt ist, dass ihr absoluter Betrag immer unter einer gegebenen Grösse ε bleibt. Dann drückt sich das Trägheitsmoment des Körpers folgendermassen aus:

$$K = \int (\varrho + \Delta\varrho)(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$
$$= \varrho \int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz + \int \Delta\varrho\, (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = K_0 + k.$$

Das erste Integral stellt das Trägheitsmoment dar, welches sich ergiebt, wenn wir allen Körperelementen die constante Dichte ϱ beilegen; das zweite Integral liefert die Abweichung des wirklichen Trägheitsmomentes von diesem ersten Näherungswerthe — wir wollen dasselbe kurz als das Fehlerintegral bezeichnen.

Es fragt sich nun: wie muss die unbekannte Funktion $\Delta\varrho$ unter Berücksichtigung der gegebenen Bedingung abs $\Delta\varrho < \varepsilon$ beschaffen sein, damit der Betrag des Fehlerintegrales ein Maximum wird, und wie gross ist dieser Maximalwerth?

Ist die Aufgabe das Maximum des Fehlerintegrales k zu ermitteln, an keine weitere Bedingung geknüpft, liegt also der Fall physikalisch so, dass wir nur die Grenzen kennen, zwischen denen die Dichte jedes Körperelementes liegen muss, so wird der gesuchte Maximalwerth offenbar dann erreicht werden, wenn wir in allen Gliedern der unendlichen Summen für $\Delta\varrho$ seinen Maximalwerth einsetzen, das Fehlerintegral also schreiben:

$$k_{max} = \varepsilon \int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \frac{\varepsilon}{\varrho} K_0.$$

Der Procentfehler, den die Dichteschwankungen in der Berechnung des Trägheitsmomentes hervorbringen werden, bleibt also in diesem Falle sicher kleiner oder wird höchstens gleich

dem Procentverhältniss der grössten Abweichung ε zur gegebenen Dichte ϱ.

Bei allen physikalischen Problemen, bei denen die Berechnung von Trägheitsmomenten in Frage kommt, wird nun aber die Sache in der Regel so liegen, dass nicht nur die Grenzen bekannt sind, zwischen denen die Dichte jedes Körperelementes liegen muss, sondern dass zugleich die mittlere Dichte (oder, was auf dasselbe hinauskommt, Masse und Volumen) des ganzen Körpers gegeben ist. Bedeutet ϱ diese mittlere Dichte, so kann die Abweichung $\Delta\varrho$ jetzt nicht mehr ganz beliebig zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegen, sondern sie ist der Bedingung unterworfen: dass die Produkte aller Abweichungen $\Delta\varrho$ in die zugehörigen Raumelemente eine verschwindende Summe geben müssen.

Denn es ist offenbar die Masse des ganzen Körpers:

$$M = \int(\varrho + \Delta\varrho)\,dx\,dy\,dz = \varrho\int dx\,dy\,dz$$

also:
$$\int \Delta\varrho\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Es fragt sich: welches wird unter Berücksichtigung dieser Nebenbedingung der Maximalwerth des Fehlerintegrales k werden?

Analytisch formulirt sich das Problem jetzt folgendermassen:

Es ist der Maximalwerth des Integrales zu ermitteln:

$$\int \Delta\varrho\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$$

— dieses Integral über einen gegebenen Körper erstreckt — wenn $\Delta\varrho$ eine ganz beliebige Funktion von x, y, z bedeutet, die nur den Einschränkungen unterworfen ist, dass

$$abs\,|\,\Delta\varrho\,| \leqq \varepsilon \text{ und } \int \Delta\varrho\,dx\,dy\,dz = o,$$

wenn letzteres Integral gleichfalls über den ganzen Körper erstreckt wird.

Wir können die Lösung dieser Aufgabe, indem wir wieder zu einer mehr physikalischen Fassung zurückkehren, sofort in folgender Form aussprechen:

Legt man um die z-Axe, auf welche das Trägheitsmoment bezogen ist, einen Cylinder, dessen Radius so bestimmt ist, dass innerhalb desselben ein gleicher Volumentheil des gege-

benen Körpers liegt wie ausserhalb, so tritt das Maximum des Fehlerintegrales unter den gegebenen Bedingungen dann ein, wenn wir der ausserhalb befindlichen Masse überall die Dichte $\varrho + \varepsilon$, der innerhalb befindlichen überall die Dichte $\varrho - \varepsilon$ beilegen (oder auch umgekehrt der Masse ausserhalb die Dichte $\varrho - \varepsilon$, der innerhalb die Dichte $\varrho + \varepsilon$; es ändert sich dann nur das Vorzeichen des Fehlerintegrales, sein absoluter Betrag bleibt in beiden Fällen derselbe).

Es ist zunächst klar, dass unsere Lösung die obigen Bedingungen der Aufgabe erfüllt: der Betrag der Abweichung $\Delta\varrho$ übersteigt nie den Werth ε, und die mittlere Dichte des ganzen Körpers erhält den Werth ϱ. Ferner ist einzusehen, dass die gegebene Dichtevertheilung in der That die obere Grenze des Trägheitsmomentes und damit auch des Fehlerintegrales k liefert. Denn denken wir uns, um eine andere Dichtevertheilung zu erhalten, etwa die Dichte eines ausserhalb des Cylinders gelegenen Massentheilchens $d\tau$ um a verkleinert, so müssen wir, um den Werth der mittleren Dichte nicht zu ändern, dafür die Dichte eines anderen Massentheilchens entsprechend vergrössern; letzteres Theilchen kann aber, da die Theile ausserhalb des Cylinders schon den grössten statthaften Werth der Dichte besitzen, nur innerhalb des Cylinders liegen. Sei die Grösse dieses zweiten Massentheilchens $d\tau' = n\,d\tau$, so müssen wir, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, die Dichte dieses Theilchens um den Werth a/n vergrössern. Der Abstand des Theilchens $d\tau$ von der z-Axe sei gleich r, der des Theilchens $d\tau'$ gleich r'. Dann ist die Abnahme, die die Dichteverminderung des Theilchens $d\tau$ im ganzen Trägheitsmomente hervorbringt, gleich $a r^2 d\tau$; die Zunahme infolge der Dichtevermehrung des Theilchens $d\tau'$ ist dagegen gleich $(a/n) r'^2 d\tau' = a r'^2 d\tau$. Nun ist $r > r'$, also ist die Abnahme des Trägheitsmomentes grösser als die Zunahme; jede Aenderung in der gegebenen Dichtevertheilung wird also eine Verminderung des Trägheitsmomentes zur Folge haben. Damit ist bewiesen, dass in der That die gegebene discontinuirliche Dichtevertheilung dem Maximalwerthe des Fehlerintegrales k entspricht.

Eine discontinuirliche Dichtevertheilung von so specieller

Beschaffenheit wird natürlich in Wirklichkeit nicht vorkommen; berechnen wir deshalb für einen gegebenen Körper den theoretischen Maximalwerth des Fehlerintegrales k, so werden wir sagen können, dass der wirkliche Fehler, mit dem das aus der mittleren Dichte ϱ berechnete Trägheitsmoment behaftet sein wird, immer kleiner sein muss als dieser Werth.

Wir wollen nun an die Aufgabe gehen, für einige der in der physikalischen Technik gebräuchlichsten Körperformen die obere Grenze des Fehlerintegrales k im Verhältniss zum berechneten Trägheitsmomente K_0 wirklich zu ermitteln. Hierbei wird nun schon die Forderung, den Radius eines um die z-Axe gelegten Cylinders so zu bestimmen, dass innerhalb und ausserhalb des Cylinders gleiche Volumina des Körpers liegen, meist auf unlösbare Gleichungen führen; wir werden uns in solchen Fällen mit Näherungsformeln begnügen müssen, die hier um so mehr gestattet sind, als ja in allen Fällen der wirkliche Fehler ziemlich weit von dem theoretischen Maximalwerthe entfernt sein wird.

1. Gerade Linie (Dünner Stab.)

Die Länge der Geraden sei l. Dann ist das Trägheitsmoment der homogenen Geraden, bezogen auf eine durch den Mittelpunkt gehende, zur Richtung der Geraden senkrechte Axe bekanntlich: $K_0 = \frac{1}{12}\varrho\, l^3$.

Bezeichnet wieder ε die äusserste Grenze, bis zu der die Dichte der einzelnen Theilchen nach beiden Seiten hin von der mittleren Dichte ϱ abweichen darf, so tritt hier das Maximum des Trägheitsmomentes ein, wenn wir der inneren Hälfte der Geraden, also dem Theile von $-l/4$ bis $+l/4$ die Dichte $\varrho-\varepsilon$, der äusseren Hälfte die Dichte $\varrho+\varepsilon$ beilegen. Der Werth des Fehlerintegrales wird dann:

$$k_{max} = \varepsilon \int_{-\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{4}} x^2\, dx - \varepsilon \int_{-\frac{l}{4}}^{+\frac{l}{4}} x^2\, dx + \varepsilon \int_{+\frac{l}{4}}^{+\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{\varepsilon l^3}{16}$$

also:

$$\frac{k_{max}}{K_0} = 0{,}75\ \frac{\varepsilon}{\varrho}$$

2. Rechtwinkliges Parallelepiped. Die Längen der Kanten seien a, b und c; das Trägheitsmoment sei bezogen auf eine durch den Mittelpunkt gehende, zur Kante c parallele Axe.

Die Aufgabe, den Radius eines um die Axe gelegten Kreiscylinders so zu bestimmen, dass dieser den Körper in zwei gleiche Theile zerschneidet, führt hier im allgemeinen auf eine nicht in geschlossener Form lösbare transscendente Gleichung. Unter der Voraussetzung jedoch, dass die Kantenlänge a gross ist gegen die Kantenlänge b, werden wir dem Maximalwerthe des Fehlerintegrales sehr nahe kommen, wenn wir im Abstande $-a/4$ und $+a/4$ von der Axe zwei Ebenen senkrecht zur Kante a gelegt denken und den Körpertheilchen innerhalb dieser Ebenen die Dichte $\varrho - \varepsilon$, den Körpertheilchen ausserhalb die Dichte $\varrho + \varepsilon$ beilegen. Dann wird bekanntlich $K_0 = \frac{1}{12}\varrho\, abc\,(a^2+b^2)$;

$$k_{max} = \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \left\{ \varepsilon \int_{-\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{4}} (x^2+y^2)\,dx - \varepsilon \int_{-\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{4}} (x^2+y^2)\,dx \right.$$

$$\left. + \varepsilon \int_{+\frac{a}{4}}^{+\frac{a}{2}} (x^2+y^2)\,dx \right\} = \frac{\varepsilon\, a^3\, b\, c}{16}$$

also:
$$\frac{k_{max}}{K_0} = 0{,}75\ \frac{\varepsilon}{\varrho}\ \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

3. Kreiscylinder. a. Das Trägheitsmoment sei bezogen auf die Axe des Cylinders. Der Halbmesser des Cylinders sei R, die Länge l.

Wollen wir hier um die Rotationsaxe einen Cylinder legen, der den gegebenen in zwei gleiche Theile zerschneidet, so müssen wir den Radius desselben setzen: $R' = R/\sqrt{2}$. Die Dichte im Inneren dieses Hülfscylinders setzen wir gleich $\varrho - \varepsilon$, die Dichte ausserhalb gleich $\varrho + \varepsilon$.

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes führen wir hier am besten in der xy-Ebene Polarcoordinaten ein. Dann können wir, wenn wir den Radius vector mit r, den Winkel

desselben mit der Abscissenaxe mit φ bezeichnen, dem Massenelemente die Form geben: $dm = (\varrho + \Delta\varrho)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$. Dann wird das Trägheitsmoment:

$$K = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (\varrho + \Delta\varrho)\, r^3\, dr$$

$$K_0 = \varrho \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3\, dr = \frac{\varrho R^4 \pi l}{2}$$

$$k_{max} = \int_0^l dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ -\varepsilon \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} r^3\, dr + \varepsilon \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R r^3\, dr \right\} = \frac{\varepsilon R^4 \pi l}{4}$$

$$\frac{k_{max}}{K_0} = 0{,}5\, \frac{\varepsilon}{\varrho}.$$

b. Geht die Rotationsaxe durch den Mittelpunkt des Cylinders senkrecht zur Cylinderaxe, so werden wir wieder unter der Voraussetzung, dass die Länge des Cylinders gross ist gegen seine Dicke, das Maximum des Fehlerintegrales näherungsweise dann erhalten, wenn wir in den Abständen $-l/4$ und $+l/4$ von der Rotationsaxe zwei Ebenen senkrecht zur Cylinderaxe legen und innerhalb derselben die Dichte $\varrho - \varepsilon$, ausserhalb die Dichte $\varrho + \varepsilon$ setzen.

Dann wird $K_0 = \frac{1}{12} \varrho r^2 \pi l (l^2 + 3r^2)$:

$$k_{max} = \int_{-r}^{+r} dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{+\sqrt{r^2-y^2}} dz \left\{ \varepsilon \int_{-\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{4}} (x^2 + y^2)\, dx - \varepsilon \int_{-\frac{l}{4}}^{+\frac{l}{4}} (x^2 + y^2)\, dx \right.$$

$$\left. + \varepsilon \int_{+\frac{l}{4}}^{+\frac{l}{2}} (x^2 + y^2)\, dx \right\} = \frac{\varepsilon r^2 \pi l^3}{16}$$

$$\frac{k_{max}}{K_0} = 0{,}75\, \frac{\varepsilon}{\varrho}\, \frac{l^2}{l^2 + 3r^2}$$

4. Hohler Kreiscylinder (Ring). Diese Körperform ist von besonderer Bedeutung, da sie vielfach zur Bestimmung

von Trägheitsmomenten nach der Belastungsmethode verwendet wird.

Der innere Halbmesser sei r_0, der äussere r_1, die Höhe h. Das Trägheitsmoment sei auf die Axe des Ringes bezogen.

Bezeichnet man den Radius desjenigen um die Axe gelegten Cylinders, der den gegebenen Ring in zwei gleiche Theile zerschneidet, mit r', so hat man zur Bestimmung von r' die Gleichung: $r'^2 - r_0^2 = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_0^2)$.

Hieraus: $$r' = \sqrt{\frac{r_0^2 + r_1^2}{2}}$$

Innerhalb dieses Hülfscylinders legen wir dem Körper die Dichte $\varrho - \varepsilon$, ausserhalb die Dichte $\varrho + \varepsilon$ bei. Dann ist, indem wir wieder in der xy-Ebene Polarcoordinaten einführen:

$$K_0 = \tfrac{1}{2}\varrho\pi h(r_1^4 - r_0^4)$$

$$k_{max} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ -\varepsilon \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{r_0^2+r_1^2}{2}}} r^3 dr + \varepsilon \int_{\sqrt{\frac{r_0^2+r_1^2}{2}}}^{r_1} r^3 dr \right\} = \frac{\varepsilon\pi h}{4}(r_1^2 - r_0^2)^2$$

$$\frac{k_{max}}{K_0} = 0{,}5\,\frac{\varepsilon}{\varrho}\,\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2 + r_0^2}.$$

Die hier aufgestellten Formeln beziehen sich auf den Fall, dass die Dichtevertheilung im Körper nicht bekannt ist. In praxi wird allein dieser Fall in Betracht kommen, da man ohne Zerlegung des Körpers wohl den allgemeinen Charakter der Dichtevertheilung und den ungefähren Maximalbetrag der Dichteschwankungen wird angeben, schwerlich aber einen bestimmten Funktionsausdruck mit bekannten Coëfficienten für die Dichtevertheilung wird aufstellen können. Wir wollen indess an dem Beispiele einiger unserer Untersuchungskörper, für deren Dichtevertheilung die genauen Zahlenwerthe in den Tabellen des dritten Capitels enthalten sind, eine Vorstellung davon zu gewinnen suchen, wie weit sich der Fehler, den man bei der Berechnung des Trägheitsmomentes aus der mittleren Dichte wirklich begehen wird, seinem theoretischen Maximalwerthe annähert.

Als erstes Beispiel nehmen wir die Scheibe I des Messingcylinders Nr. 5 (Tab. 6). Der Radius der Scheibe betrug 1,9 cm, die Masse 101,855 g, die grösste Abweichung von der mittleren Dichte 2,1 Proc. Demnach wird nach obigen Formeln: $k_{max}/K_0 = 0{,}010$.

Berechnen wir nun das Trägheitsmoment aus den in Tab. 6a verzeichneten Dichten der einzelnen concentrischen Schichten, indem wir zunächst aus der Gesammtmasse, dem Radius und der mittleren Dichte die genaue Höhe der Scheibe, und hierauf das Trägheitsmoment jeder einzelnen Schicht aus den beiden Radien, der Höhe und der Dichte der Schicht bestimmen, so erhalten wir:

$$K = K_0 + k = 184{,}90\,[g\,cm^2]$$

während sich für K_0 aus der Gesammtmasse und dem Radius der Werth ergiebt:

$$K_0 = 183{,}85\,[g\,cm^2].$$

Nehmen wir an, dass der vorstehende Werth von K, der natürlich auch nur eine Annäherung darstellen wird, der richtige sei, so ist also der wirklich begangene Fehler:

$$\frac{k}{K_0} = 0{,}0057,$$

also etwa die Hälfte des theoretischen Maximalwerthes.

Als zweites Beispiel diene die Scheibe II des Messingcylinders Nr. 6 (Tab. 7). Der Radius der Scheibe beträgt hier 1,5 cm, die Masse 52,253 g, die grösste Abweichung von der mittleren Dichte ca. 3,5 Proc., sodass sich also ergiebt: $k_{max}/K_0 = 0{,}018$.

Aus der Gesammtmasse und dem Radius ergiebt sich:

$$K_0 = 58{,}785\,[g\,cm^2]$$

aus den Dichten und Radien der einzelnen concentrischen Schichten:

$$K = K_0 + k = 59{,}478\,[g\,cm^2],$$

sodas also der wirklich begangene Fehler hier den sehr grossen Werth erhält:

$$\frac{k}{K_0} = 0{,}012$$

oder etwa $^2/_3$ des theoretischen Maximalwerthes.

Als drittes Beispiel wollen wir endlich noch den Messingring Nr. 4 (Tab. 5) betrachten. Der äussere Radius betrug 4 cm, der innere Radius 3 cm, die Gesammtmasse 103,832 d, die grösste Abweichung von der mittleren Dichte 0,72 Proc. Demnach wird:

$$k_{max}/K_0 = 0{,}0010.$$

Aus den beiden Radien und der Gesammtmasse findet sich;

$$K_0 = 1297{,}9\,[g\,cm^2],$$

aus den Radien und Dichten der einzelnen Schichten folgt:

$$K = K_0 + k = 1298{,}2\,[g\,cm^2].$$

Es ist hier also der wirkliche Fehler:

$$\frac{k}{K_0} = 0{,}00023$$

oder etwa $\frac{1}{4}$ des theoretischen Maximalwerthes.

Man wird nach diesen Beispielen annehmen können, dass der bei der gewöhnlichen Berechnung des Trägheitsmomentes aus der mittleren Dichte begangene Fehler auch bei ungünstiger Dichtevertheilung, d. h. wenn die Dichte nach der Rotationsaxe hin dauernd ab- oder dauernd zunimmt, höchstens zwei Drittel des nach obigen Formeln berechneten theoretischen Maximalwerthes betragen, bei günstiger Dichtevertheilung sich aber noch viel geringer gestalten wird. Immerhin wird der wirklich begangene Fehler bei so bedeutenden Dichteschwankungen, wie sie sich im Messing vorfinden, in vielen Fällen die zulässigen Grenzen überschreiten, sodass es rathsam erscheint, Körper, deren Trägheitsmoment man mit grösserer Genauigkeit berechnen will, z. B. die zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsmomentes nach der Gauss'schen Methode dienenden Belastungskörper nicht aus Messing, sondern aus einem homogeneren Materiale, etwa Zink oder Kupfer, herzustellen.

Rückblick.

Fassen wir die wesentlichsten Resultate der vorliegenden Untersuchungen nochmals kurz zusammen, so sind dies etwa die folgenden:

Gegossene Messingkörper zeigten übereinstimmend eine beträchtliche Abnahme der Dichte in der Richtung von aussen nach innen. Der Betrag der Aenderung erreichte in den

meisten Fällen ca. 4 Proc., in einem Falle sogar mehr als 6 Proc. der mittleren Dichte. Die mechanische Bearbeitung macht die Körper homogener; so blieben die Dichteschwankungen in starkem Messingdraht und Messingblech unter dem Betrage von 1 Proc., während sie in dünneren Drähten und Blechen kaum die Grenze der Beobachtungsfehler überschritten.

Zinkguss erwiess sich im hohen Grade homogen; ebenso zeigte Kupfer in fehlerfreien Gussstücken sowie im bearbeiteten Zustande nur geringe Dichteschwankungen (in Guss ca. 3 Prom., in Draht und Blech ca. 1,5 Prom. der mittleren Dichte).

Gusseisen ergab Dichteschwankungen bis nahe an 1 Proc. Die untersuchten Körper zeigten übereinstimmend eine Abnahme der Dichte in der Richtung von unten nach oben. Der untersuchte Stahl, der eine starke mechanische Bearbeitung erfahren hatte, erwies sich als sehr homogen und erfuhr durch die Härtung keine wesentliche Aenderung der Dichtevertheilung.

Was den Einfluss der Inhomogenität auf die Berechnung von Trägheitsmomenten anbetrifft, so dürfte der durch dieselbe verursachte Fehler wenigstens bei gegossenen Messingkörpern häufig die zulässigen Grenzen überschreiten. Die theoretische Betrachtung ergab, dass in der Berechnung des Trägheitsmomentes eines cylindrischen Körpers in Bezug auf seine Axe durch die Dichteschwankungen ein relativer Fehler veranlasst werden könne, dessen obere Grenze durch den halben relativen Betrag der grössten Abweichung von der mittleren Dichte gegeben ist. Die ausgeführten Beispiele zeigten, dass der wirklich begangene Fehler im ungünstigsten Falle zwei Drittel, in anderen Fällen nur die Hälfte oder ein Viertel des theoretischen Maximalwerthes erreichte, trotzdem aber in dem einen Falle noch immer mehr als 1 Proc. betrug.

Anhang.

Ueber einige Fehlerquellen der Wage.[1]

Bei der Ausführung der vorliegenden Arbeit gab mir die andauernde Beschäftigung mit der Wage Gelegenheit, einige theils regelmässige, theils zufällige Fehlerquellen dieses feinsten

1) Die folgenden Mittheilungen sind bereits veröffentlicht in der Zeitschrift für Instrumentenkunde 1885, p. 161—163.

aller physikalischen Messinstrumente kennen zu lernen, auf die ich im Folgenden aufmerksam machen möchte, da dieselben nicht allgemein bekannt sein dürften, während sie doch unter Umständen die Resultate feiner Wägungen merklich beeinflussen können — besonders wenn der Beobachter nicht gewöhnt ist, nach jeder Wägung sogleich wieder den Nullpunkt der Wage zu controliren.

Der erste dieser störenden Einflüsse macht sich geltend, wenn man, wie bei specifischen Gewichtsbestimmungen, ein Gefäss mit Wasser oder einer anderen stark verdunstenden Flüssigkeit innerhalb des Wagegehäuses aufstellen muss. Die Verdunstung der Flüssigkeit erniedrigt die Temperatur der benachbarten Luftschichten und erzeugt dadurch im Wagegehäuse eine Luftströmung, welche diejenige Wagschale, über der die verdunstende Flüssigkeit sich befindet, herunterdrückt und mithin den Nullpunkt der Wage nach der anderen Seite hin verschiebt. Die Grösse dieser Verschiebung ist bei einer und derselben Wage natürlich abhängig von der Intensität der Verdunstung, also von der Temperatur und der Oberflächengrösse des Wassers und von der relativen Feuchtigkeit der Luft im Wagegehäuse.

Bei der von mir benutzten Wage des Würzburger physikalischen Instituts (geliefert von H. Schickert in Dresden), die für eine Belastung von 0 bis 1000 *g* eine sehr constante Empfindlichkeit von 1,25 Scalentheilen pro Milligramm zeigte, betrug die gedachte Verschiebung während der letzten Wintermonate im Durchschnitt 0,15 Scalentheile, erhöhte sich aber durch Einbringen eines Trockengefässes (Chlorcalcium) in das Wagegehäuse auf 0,25 Scalentheile. Bei einer anderen Schickert'schen Wage, mit der ich während der Sommermonate im physikalischen Laboratorium des Kgl. Polytechnikums zu Dresden arbeitete, stieg bei einer Empfindlichkeit von 2 Scalentheilen pro Milligramm die durch Einbringen eines Wassergefässes verursachte Nullpunktsverschiebung bis auf 0,8 Scalentheile; eine Vernachlässigung dieser Verschiebung würde also in diesem Falle einen Wägungsfehler von 0,4 mg im Gefolge haben.

Der Einfluss dieser ersten Fehlerquelle wird eliminirt oder

wenigstens möglichst gering gemacht, wenn man den unmittelbar nach der Wägung, noch vor Entfernung der verdunstenden Flüssigkeit aus dem Wagegehäuse beobachteten Nullpunkt der Gewichtsbestimmung zu Grunde legt, da man die Stärke der durch die Verdunstung erzeugten Luftströmung während der Dauer einer Wägung wohl als nahezu constant betrachten kann.

Eine andere Fehlerquelle, die allerdings seltener auftreten wird, dann aber sehr bedeutende Wägungsfehler verursachen kann, besteht in der zufälligen Electrisirung von Theilen des Wagegehäuses. An der ersterwähnten Schickert'schen Wage, deren Gehäuse oben durch eine Glassplatte abgeschlossen ist, wurde diese bei einem gelegentlichen Abstäuben so stark electrisirt, dass sie die Reitergewichtchen von den Tragarmen ihrer Verschiebungsvorrichtung zum Herabfallen brachte. Eine weitere Verfolgung dieser zufälligen Beobachtung, zu der mich Herr Professor Kohlrausch veranlasste, ergab folgende Resultate.

Durch leichtes Reiben der oberen Seite der Deckplatte mit einem trockenen Leinentuche wurde der Nullpunkt der Wage um mehrere Theilstriche verschoben; geringeren Effect hatte eine leichte Reibung mit einem seidenen oder wollenen Tuche. Die durch starkes Reiben mit einem Leinentuche der einen Seite der Deckplatte zugeführte Ladung vermochte eine Belastung von 600 mg zu equilibriren, während die mit Seide oder Wolle unter gleichen Luftverhältnissen erregten Ladungen im Maximum nur 250 mg, bez. 70 mg im Gleichgewicht zu halten vermochten. Eine durch starkes Reiben mit einem Leinentuche erzeugte Ladung vermochte noch nach einer Zeit von zwei Stunden eine Belastung von 10 mg zu equilibriren. Durch Reiben mit der Hand vermochte ich keine wahrnehmbare Ladung hervorzubringen, während von anderer Seite schon eine leichtes Streichen mit dem Handrücken genügte, um eine Nullpunktsverschiebung von 0,4 Scalentheilen zu bewirken. Durch leichtes Reiben der Deckplatte mit dem Holzetui eines Gewichtssatzes wurde eine Nullpunktsverschiebung von 0,2 Scalentheilen, durch stärkeres Reiben eine solche von 0,6 Scalentheilen erzielt. Durch kräftiges Anblasen mit

einem Blasebalg vermochte ich die Deckplatte nicht merklich zu electrisiren.

Die Entladung der Deckplatte geschah bei diesen Versuchen durch die Flamme eines Bunsenbrenners, wobei man natürlich so rasch verfahren muss, dass nicht etwa durch Wärmeeinflüsse Nullpunktsverschiebungen hervorgerufen werden. Die Entladung war auch bei dieser schnellen Operationsweise eine sehr vollständige.

Bei anderen, nicht mit einer Glasplatte gedeckten Wagen des Würzburger physikalischen Institutes wurde durch eine Reibung des Gehäuses keine wahrnehmbare Nullpunktsverschiebung hervorgerufen; auch eine sehr feine Bunge'sche Wage, die zwar mit Glas eingedeckt war, die aber sehr kurze Arme besass, und deren Deckplatte sich in grösserer Entfernug vom Wagebalken befand, verhielt sich unempfindlich gegen electrische Erregung der Deckplatte. Eine Reibung der vorderen oder seitlichen Glaswände endlich zeigte sich bei allen von mir untersuchten Wagen ohne merklichen Einfluss.

Ein durch electrische Erregung der Deckplatte verursachter Wägungsfehler wird sich zwar bei häufiger Controle des Nullpunkts, da die Ladung immer einige Zeit anhält, ebenfalls nachträglich durch eine Nullpunktsverschiebung verrathen; das Vorhandensein eines solchen Fehlers wird aber, da sich seine Grösse durchaus nicht abschätzen lässt, eine zeitraubende Wiederholung der Wägung nach vorheriger Entladung der Deckplatte nöthig machen. Man wird deshalb gut thun, sich vor diesem störenden Einflusse ein für alle mal zu schützen, indem man etwa an der unteren Seite der Deckplatte ein passend abgeleitetes Gitter aus Stanniolstreifen anbringt.

Es sei mir gestattet, am Schlusse dieser Arbeit meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. F. Kohlrausch in Würzburg, für die Anregung, die er mir zu derselben gegeben hat, und für die Unterstützung, die er mir bei ihrer Ausführung durch Rath und That hat angedeihen lassen, meinen wärmsten Dank auszusprechen!